

■ أنشطة تمهيدية :

- ☺ نشاط رقم 1 : (مفهوم متتالية عددية) أنظر السلسلة
 ☺ نشاط رقم 2 : (صيغة متتالية)
 ☺ نشاط رقم 3 : (المتتالية الترجعية)

■ تعريف :

- ♦ نسمي متتالية كل دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية IN , أو على مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من n_0 أو يساوي عدد صحيح طبيعي n_0 .
 ♦ صورة عدد صحيح طبيعي n نرمز لها بـ $u(n)$ و غالبا u_n .
 ♦ العدد n يسمى مدل الحد u_n .
 ♦ نرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \in IN}$ أو $(u_n)_{n \geq n_0}$.

⇒ أمثلة :

- ❶ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$. هذه المتتالية معرفة بالصيغة الصريحة لـ u_n بدلالة n .
 يمكن حساب أي حد للمتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ بسهولة إذن :

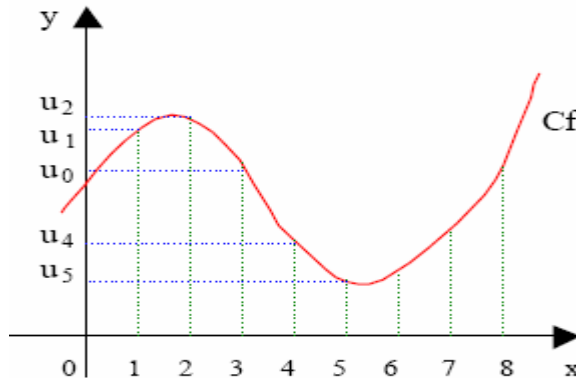
$$u_{3254} = \frac{3254}{3254^2 + 1} , u_{10} = \frac{10}{10^2 + 1} = \frac{10}{101} , u_0 = \frac{0}{0^2 + 1} = 0$$

- ❷ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_1 = 2$ و $u_{n+1} = -3u_n + 1$ من أجل $n \geq 1$. هذه المتتالية معرفة بالحد الأول u_1 و بعلاقة (تسمى علاقة ترجعية) تمكن من حساب حد من حدودها انطلاقا من الحد السابق .
 لدينا مثلا من أجل $n = 1$: $u_{n+1} = u_{1+1} = -3u_1 + 1$: إذن $u_2 = -3 \times 2 + 1 = -5$ ثم نستعمل u_2 من أجل حساب u_3
 لدينا إذن : $u_{2+1} = -3u_2 + 1 = 16$: إذن $u_3 = -3 \times (-5) + 1 = 16$ و من أجل حساب u_{50} , يجب حساب بالتتابع الحدود $u_4, u_5, \dots, u_{49}, u_{50}$. وهكذا .

- ☺ التمرين التطبيقي رقم 1 : أنظر السلسلة
 ☺ التمرين التطبيقي رقم 2 :
 ☺ التمرين التطبيقي رقم 3 :

■ التمثيل المبياني :

- لتكن f دالة عددية معرفة على الأقل على المجال $[0, +\infty[$ نعرف المتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ بما يلي : $u_n = f(n)$.
 نحصل على التمثيل المبياني للمتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ انطلاقا من التمثيل المبياني للدالة f .



- بصفة عامة التمثيل المبياني للمتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ هو مجموعة النقط المستقلة (n, u_n) حيث $n \in IN$.

(II) المتتاليات المكبورة – المصغورة و المحدودة :

■ نشاط تمهيدي:

☺ نشاط رقم 4: (المتتالية المكبورة – المصغورة – المحدودة)

■ تعريف :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية .

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \geq n_0 : U_n \leq M \Leftrightarrow \text{مكبورة } (u_n)_{n \geq n_0} \spadesuit$$

$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \geq n_0 : U_n \geq m \Leftrightarrow \text{مصغورة } (u_n)_{n \geq n_0} \spadesuit$$

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \geq n_0 : m \leq U_n \leq M \Leftrightarrow \text{محدودة } (u_n)_{n \geq n_0} \spadesuit$$

⇒ أمثلة :

① نعتبر المتتالية : $U_n = \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) من أجل كل n من \mathbb{N} لدينا $U_n \geq 0$ إذن U_n مصغورة ب 0 .

ولدينا كذلك لكل n من \mathbb{N} : $n+1 \geq 1$ إذن $\frac{1}{n+1} \leq 1$ إذن $U_n \leq 1$ إذن U_n مكبورة ب 1 .
بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مكبورة و مصغورة فإنها محدودة .

$$\text{② نعتبر المتتالية : } U_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^2} ; n \in \mathbb{N}^* :$$

لدينا : $-2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2$ و $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$ ($\forall n \geq 1$) إذن : $-2 \leq U_n \leq 2$.

نستنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ محدودة .

☺ التمرين التطبيقي رقم 4:

(III) رتابة متتالية :

■ نشاط تمهيدي:

☺ نشاط رقم 5: (رتابة متتالية)

■ تعريف :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية .

$$\text{المتتالية } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ تزايدية (قطعا) } \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : u_{n+1} \geq u_n \text{ (} u_{n+1} > u_n \text{)}$$

$$\text{المتتالية } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ تناقصية (قطعا) } \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : u_{n+1} \leq u_n \text{ (} u_{n+1} < u_n \text{)}$$

$$\text{المتتالية } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ رتبية (قطعا) } \Leftrightarrow \text{تزايدية (قطعا) أو تناقصية (قطعا) .}$$

☺ ملحوظات :

① تعريف متتالية تزايدية (أو تناقصية) ليس مثل تعريف دالة تزايدية (أو تناقصية) . في حالة متتالية نقارن حدين متتابعين u_n و u_{n+1}

بينما في حالة دالة نقارن صورتين حقيقيين a و b كيفما كانا من مجال دراسة الرتبة .

$$\text{② } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تزايدية } \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots$$

$$\text{③ } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تناقصية } \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots$$

4 لدراسة رتابة متتالية نتبع إحدى الطرق التالية :

(1) نقارن U_{n+1} و U_n .

(2) ندرس إشارة $U_{n+1} - U_n$.

(3) إذا كان $U_n > 0$ نقارن $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 .

(4) إذا كانت $U_n = f(n)$ نستعمل رتابة f .

☺ التمرين التطبيقي رقم 5:

(IV) المتتاليات الحسابية :

■ نشاط تمهيدي:

☺ نشاط رقم 6 : (المتتالية الحسابية)

■ تعريف :

تكون متتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث $U_{n+1} = U_n + r$ لكل $n \geq n_0$ العدد r يسمى أساس المتتالية .

☺ ملحوظة :

♦ للبرهان على أن متتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ حسابية , يمكن حساب الفرق $u_{n+1} - u_n$ إذا وجدنا الفرق عدد ثابت r فإن المتتالية حسابية أساسها r .

⇒ مثال :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب : $u_n = -3n + 2$.

لدينا : $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 2 + 3n - 2 = -3$ إذن (U_n) متتالية حسابية أساسها -3 .

☑ خاصية :

إذا كانت $(U_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية فإنه لكل عدد p بحيث $n_0 \leq p \leq n$ لدينا $U_n = U_p + (n - p)r$

⇒ مثال :

(U_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ و حدها الأول $u_0 = -5$.

إذن : $u_4 = u_0 + (4 - 0)r = -5 + 4 \times 3 = 7$, $u_{20} = u_4 + (20 - 4)r = 7 + 16 \times 3 = 55$, $u_{598} = u_{138} + (598 - 138)r = \dots$.

☺ نشاط رقم 7 : (مجموع عدة حدود متتالية حسابية)

☑ خاصية :

إذا كانت $(U_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية فإنه لكل n و p بحيث $n_0 \leq p < n$: $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right)$

أي أن مجموع حدود متتالية حسابية يساوي :

مجموع الحدود \times (الحد الأول + الحد الأخير)

☺ ملحوظة :

♦ العدد $(n-p+1)$ يمثل عدد حدود المجموع $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$.

♦ نرسم للمجموع $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ بالرمز $\sum_{k=p}^n u_k$. مثلاً : $\sum_{k=3}^{12} u_k = u_3 + u_4 + \dots + u_{12}$.

⇒ أمثلة : في الأمثلة التالية المتتالية حسابية .

❶ عدد حدود المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ هو $(n+1)$ وليس n يعني : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$

❷ عدد حدود المجموع $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ هو n يعني : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$

❸ عدد حدود المجموع $u_5 + u_6 + \dots + u_{37}$ هو $(37-5+1=33)$ يعني : $u_5 + u_6 + \dots + u_{37} = (33) \left(\frac{u_5 + u_{37}}{2} \right)$

☺ التمرين التطبيقي رقم 7 :

(V) المتتالية الهندسية :

■ نشاط تمهيدي :

☺ نشاط رقم 8 : (المتتالية الهندسية)

■ تعريف :

تكون متتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث $U_{n+1} = q \times U_n$ لكل $n \geq n_0$ العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية

☺ ملحوظة :

♦ للبرهان على أن متتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ هندسية , يمكن حساب الخارج $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ إذا وجدنا الخارج عدد ثابت q فإن المتتالية هندسية أساسها q

⇒ مثال : نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب : $u_n = 5 \times 3^n$.

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$ إذن (U_n) متتالية هندسية أساسها 3 .

☺ خاصية :

إذا كانت $(U_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية فإنه لكل عدد p بحيث $n_0 \leq p \leq n$ لدينا $U_n = U_p \times q^{n-p}$

⇒ مثال : (U_n) متتالية هندسية أساسها -2 حدها الأول $u_0 = \frac{1}{8}$ و أساسها إذن :

$$u_{2369} = u_{1247} \times q^{1369-1247} = \dots , u_5 = u_5 \times q^{10-5} = (-4) \times (-2)^5 = 128 , u_5 = u_0 \times q^{5-0} = \left(\frac{1}{8} \right) \times (-2)^5 = -4$$

نشاط رقم 8 : (المتتالية الهندسية)

خاصية :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} : n_0 \leq p < n \text{ بحيث } p \text{ و } n \text{ لكل}$$

أ مثلة : في الأمثلة التالية المتتالية هندسية .

$$. u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n-0+1}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{①}$$

$$. u_1 + u_1 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{②}$$

$$. u_1 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_1 \times \frac{1-q^{n-1-1+1}}{1-q} = u_1 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{③}$$

$$. u_{125} + u_{126} + \dots + u_{575} = u_{125} \times \frac{1-q^{575-125+1}}{1-q} = u_{125} \times \frac{1-q^{451}}{1-q} \quad \text{④}$$

التمرين التطبيقي رقم 10 :