I- العبارات:

- **تقديم:**

نعتبر النصوص الرياضية التالية :

p : " جداء عددين صحيحين طبيعيين فرديين عدد فردي "

q : " مجموع أربعة أعداد صحيحة طبيعية و متتابعة يقبل القسمة على 4 "

- لكل (n,m) من $\mathbb{N}^2$ لدينا : $(2m+1)\times(2n+1)=2\left[2mn+(m+n)\right]+1$ ، النص p يحمل إذن معنا صحيحا : نقول إن قيمة حقيقة p هي 1 أو V .

- مهما يكن n من $\mathbb{N}$ لدينا : $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=4(n+1)+2$

إذن $4n+6$ لا يقبل القسمة على 4 لكل n من $\mathbb{N}$ (لأن باقي قسمته على 4 يساوي 2)

النص q يحمل إذن معنا خاطئا : نقول إن قيمة حقيقة q هي 0 أو F .

نسمي p عبارة صحيحة و q عبارة خاطئة .

- **تعريف:**

نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنا يكون إما صحيحا و إما خاطئا .

- **تمرين01:**

حدد حقيقة كل عبارة من العبارات التالية :

p : " $\sqrt{5}+\sqrt{6}\geq\sqrt{22}$ "

و q : " $4\sqrt{3}-7$ عدد حقيقي موجب قطعا "

r : " مجموع خمسة أعداد صحيحة طبيعية و متتابعة يقبل القسمة على 5 "

II- الدوال العبارية و المكممات:

1)- الدوال العبارية:

- **تقديم:**

نعتبر النصوص الرياضية التالية :

$P(n)$ " $n^2-4=0$ حيث $n\in\mathbb{Z}$ " و $P(x)$ " $-x^2+x+6<0$ حيث $x\in\mathbb{R}$ "

و $P(a,b)$ " $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ " .

نلاحظ أنه كلما أخذت n و x و (a,b) قيما على التوالي في $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ نحصل على عبارة تكون إما صحيحة أو خاطئة ، هذه النصوص تسمى دوالا عبارية .

- **تعريف:**

الدالة العبارية هي كل نص رياضي تتوقف صحة معناه على متغير (أو عدة متغيرات) و يرمز لها بالرمز $P(x)$ حيث x يتغير على مجموعة غير فارغة E .

2)- المكممات:

لتكن $P(x)$ دالة عبارية معرفة على مجموعة غير فارغة E .

- **المكمم الكوني :**

إذا كانت جميع عناصر E تحقق $P(x)$ فإن العبارة : " مهما يكن x من E لدينا : $P(x)$ "

تكتب : $\forall x\in E\ ;\ P(x)$

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني ، و يقرأ مهما يكن أو لكل أو أيا كان .

- **المكمم الوجودي :**

إذا كان يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق $P(x)$ فإن العبارة : " يوجد على الأقل x من E بحيث $P(x)$ " تكتب : $\exists x\in E\ /\ P(x)$

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي ، و يقرأ يوجد على الأقل .

بصفة خاصة ، إذا كان يوجد عنصر وحيد x من E بحيث $P(x)$ نكتب : $\exists! x\in E\ /\ P(x)$

والرمز $\exists!$ يعبر عن الوجود و الوحدانية .

- **أمثلة:**

- لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا : $x+\frac{1}{x}-2=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ ، إذن : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ x+\frac{1}{x}\geq 2$.

و بنفس الطريقة نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}_-^*\ ;\ x+\frac{1}{x}\leq -2$.

- المعادلة : $(E):\ x^2-y^2=12$ تقبل حلين في $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ و حلا وحيدا في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ، إذن :

$\exists(x,y)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*\ /\ x^2-y^2=0$ و $\exists!(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ /\ x^2-y^2=0$.

- **عبارات تحتوي على أكثر من مكمم :**

نعتبر العبارتين :

p : " $\forall a\in\mathbb{R}^*\ ;\ \exists x\in\mathbb{R}^*\ /\ a.x=1$ " و q : " $\exists x\in\mathbb{R}^*\ /\ \forall a\in\mathbb{R}^*\ ;\ a.x=1$ "

لكل a من $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $(E_a): ax=1$ تقبل حلا وحيدا x في $\mathbb{R}^*$ هو $x=\frac{1}{a}$

إذن p عبارة صحيحة .

في حين q عبارة خاطئة ، لأن المعادلات : $(E_a): ax=1$ لما يتغير a في $\mathbb{R}^*$ لا تقبل نفس الحل (حلها يتغير بتغير a) .

ومنه : إذا غيرنا ترتيب المكممات في عبارة تحتوي على أكثر من مكمم فإننا نحصل على عبارتين ليس لهما نفس المعنى .

III- العمليات على العبارات:

1)- نفي عبارة:

- **تعريف:**

نفي عبارة p هي العبارة التي تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة و صحيحة إذا كانت p خاطئة ، و يرمز لها بأحد الرمزين $\rceil p$ أو $\overline{p}$ و تقرأ نفي p .

الجدول التالي يلخص ما سبق ، و يسمى جدول حقيقة $\rceil p$.

p	$\rceil p$
1	0
0	1

- **أمثلة:**

نفي العبارة الصحيحة: p : " $4\sqrt{3}-7<0$ " هي العبارة الخاطئة : $\rceil p$: " $4\sqrt{3}-7\geq 0$ "

و نفي العبارة الخاطئة: q : " 517 عدد أولي " هي العبارة الصحيحة : $\rceil q$: " 517 ليس عددا أوليا "

- **نفي عبارة مكممة:**

نفي العبارة : " $\forall x\in E\ ;\ P(x)$ " هي العبارة : " $\exists x\in E\ /\ \rceil P(x)$ "

و نفي العبارة : " $\exists x\in E\ /\ P(x)$ " هي العبارة : " $\forall x\in E\ ;\ \rceil P(x)$ " .

- **تمرين02:**

أكتب نفي كل عبارة من العبارات التالية ، ثم إستنتج قيمة حقيقة كل واحدة منها :

p : " $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x^2>0$ " ، q : " $\exists x\in\mathbb{R}\ /\ \cos x+2\sin x=-4$ "

و r : " $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \exists y\in\mathbb{R}\ /\ x.y=1$ " .

2)- عطف و فصل عبارتين:

- **تعريف:**

- عطف عبارتين p و q هي العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت p و q صحيحتين معا و يرمز لها بالرمز $p\ \overline{\text{و}}\ q$.

- و فصل عبارتين p و q هي العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p و q خاطئتين معا و يرمز لها بالرمز p أو q .

و جدول حقيقتيهما كالتالي :

جدول حقيقة الفصل	جدول حقيقة العطف		
q أو p	$q\ \overline{\text{و}}\ p$	q	p
1	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	0	0	0

- **ملحوظة:**

عطف عبارة و نفيها عبارة خاطئة ، في حين فصل عبارة و نفيها عبارة صحيحة .

- **تمرين03:**

حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات التالية :

p : " $2<\sqrt{3}$ أو $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ "

q : " $\frac{3}{8}$ عدد عشري أو 123 537 عدد أولي "

و r : " $10^{23}+96$ يقبل القسمة على 4 $\overline{\text{و}}$ $\frac{1}{3}$ عدد عشري " .

2)- إستلزام عبارتين:

- **تعريف:**

إستلزام عبارتين p و q هي العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة و يرمز لها بالرمز $p\Rightarrow q$ و تقرأ p تستلزم q .

و جدول حقيقة $p \Rightarrow q$ كما يلي :

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$
1	1	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	0	1	

- لاحظ أنه عندما تكون العبارة p خاطئة الإستلزام $p\Rightarrow q$ يكون صحيحا مهما تكن قيمة حقيقة العبارة q .

و عندما تكون العبارة p صحيحة فإن للعبارتين $p\Rightarrow q$ و q نفس قيمة الحقيقة .

- **تمرين04:**

أتمم ملأ الجدول السابق ، ثم قارن الإستلزامين $p\Rightarrow q$ و $q\Rightarrow p$.

- **أمثلة:**

حدد قيمة حقيقة كل إستلزام من الإستلزامات التالية :

$\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2\neq -1$ ، $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2<-1$ ، $\frac{1}{3}\notin ID\Rightarrow 2\neq -1$ و $\frac{1}{3}\notin ID\Rightarrow 2<-1$.

3)- تكافؤ عبارتين:

- **تعريف:**

نقول إن عبارتين p و q متكافئتان و نكتب $p\Leftrightarrow q$ إذا كانت لهما نفس قيم الحقيقة أي إذا كانتا صحيحتين معا أو خاطئتين معا .

- **أمثلة:**

$2<-1$ و $-7+5=0$ عبارتان خاطئتان معا ، إذن : $2<-1\Leftrightarrow -7+5=0$.

$-7+5=-2$ و $-1<2$ عبارتان صحيحتان معا ، إذن : $-1<2\Leftrightarrow -7+5=-2$.

- **تمرين05:**

إستعمل جداول الحقيقة لتبين التكافئات التالية :

$\rceil(\rceil p)\Leftrightarrow p$ و $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(q \text{ أو } \rceil p)$ و $(p\Rightarrow q \text{ و } q\Rightarrow p)\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$.

كل تكافؤ من هذه التكافئات يسمى قانونا منطقيا .

النفي ، العطف ، الفصل ، الإستلزام و التكافؤ تسمى روابط منطقية (لأنها تربط بين العبارات)

IV- القوانين المنطقية:

1)- تعريف:

نسمي قانونا منطقيا كل عبارة صحيحة مكونة من عبارة أو عدة عبارات و من الروابط المنطقية السابقة .

- **أمثلة:**

p و $\rceil p$ عبارة خاطئة ، إذن فيه ليست قانونا منطقيا .

في حين العبارات التالية : p أو $\rceil p$ ، $\rceil(\rceil p)\Leftrightarrow p$ و $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(q \text{ أو } \rceil p)$ كلها قوانين منطقية ، لأنها عبارات صحيحة .

2)- قانونا موركان:

- **تمرين06:**

أ- إستعمل جدول الحقيقة لتبين أن : $\rceil(q \text{ و } p)\Leftrightarrow(\rceil q \text{ أو } \rceil p)$.

ب- إستنتج عبارة تكافئ العبارة : $\rceil(q \text{ أو } p)$.

- **خاصية01:**

لدينا : $\rceil(q \text{ و } p)\Leftrightarrow(\rceil q \text{ أو } \rceil p)$ و $\rceil(q \text{ أو } p)\Leftrightarrow(\rceil q \text{ و } \rceil p)$.

3)- نفي إستلزام عبارتين:

بما أن $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(q \text{ أو } \rceil p)$ فإن : $\rceil(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\rceil(q \text{ أو } \rceil p)$

و باستعمال قانون موركان الثاني نحصل على : $\rceil(q \text{ أو } \rceil p)\Leftrightarrow(\rceil q \text{ و } \rceil(\rceil p))$

و لدينا : $\rceil(\rceil p)\Leftrightarrow p$ ، إذن : $\rceil(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\rceil q \text{ و } p)$.

- **خاصية02:**

لدينا : $\rceil(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\rceil q \text{ و } p)$.

4)- الإستلزام المضاد للعكس:

الإستلزام $\rceil q\Rightarrow\rceil p$ يسمى الإستلزام المضاد للعكس للإستلزام $p\Rightarrow q$.

- **خاصية03:**

لدينا : $(\rceil q\Rightarrow\rceil p)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$.

لدينا : $(\rceil q \Rightarrow \rceil p) \Leftrightarrow (\rceil(\rceil q) \text{ أو } \rceil p) \Leftrightarrow (q \text{ أو } \rceil p)$

و بما أن $(q \text{ أو } \rceil p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ فإن : $(\rceil q \Rightarrow \rceil p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

- **تمرين07:**

أكتب نفي كل عبارة من العبارات التالية ، ثم حدد قيمة حقيقتها معللا جوابك :

p : " $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \; ; \; a^2=b^2 \Rightarrow a=b$ "

q : " $\forall n\in\mathbb{N}$; (n مضاعف ل 3) أو (n^2+1 مضاعف ل 3) "

و r : " $\exists n\in\mathbb{N}$ / ($2n+1$ مربع كامل) و ($n+1$ ليس مجموع مربعين كاملين) "

V- الإستدلالات الرياضية:

1)- الإستدلال بالمثال المضاد:

للبرهان على أن العبارة $p : \forall x\in \mathrm{E} \; ; \; \mathrm{P}(x)$ خاطئة ، يكفي أن نبرهن على صحة نفيها $\rceil p : \exists x\in \mathrm{E} \; / \; \rceil \mathrm{P}(x)$ و ذلك بإثبات وجود عنصر x من E لا يحقق $\mathrm{P}(x)$.

- **مثال:**

بين بمثال مضاد أن العبارة : " $\forall n\in\mathbb{N}$; n^2+n+41 عدد أولي " خاطئة .

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $a_n = n^2+n+41$.

لدينا $a_n = n(n+1)+41$ و بأخذ $n=41$ نحصل على $a_{41} = 41\times(41+1)+41$

أي أن : $a_{41} = 41\times 43$ ، إذن a_{41} عدد غير أولي .

و بالتالي فإن " $\forall n\in\mathbb{N}$; n^2+n+41 عدد أولي " عبارة خاطئة .

- **تمرين08:**

إستعمل الإستدلال بالمثال المضاد لتبين أن العبارات التالية خاطئة :

p : " كل عدد صحيح طبيعي مضاعف للعددين 4 و 6 يقبل القسمة على 24 "

q : " $\forall (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \; ; \; \begin{cases} a\neq b \\ c\neq d \end{cases} \Rightarrow a+c\neq b+d$ "

r : " $\forall x\in]0;1[$ و $\forall y\in]0;1[$; $\dfrac{x+y}{xy(1-xy)}<1$ " .

2)- الإستدلال الإستنتاجي:

العبارة $\left[p \text{ و } (p\Rightarrow q)\right] \Rightarrow q$ قانون منطقي و يمثل قاعدة الإستدلال الإستنتاجي :

عمليا للبرهان على صحة العبارة q ، نبين أن الإستلزام $p\Rightarrow q$ صحيح حيث p عبارة صحيحة (p تسمى معطيات و q تسمى النتيجة) .

- **مثال:**

لنبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}$; ($2n+1$ مربع كامل) $\Rightarrow$ ($n+1$ مجموع مربعين كاملين)

ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث : $2n+1$ مربع كامل ، إذن يوجد k من $\mathbb{N}$ بحيث :

$$2n+1=(2k+1)^2$$

$2n+1$ عدد فردي لا يمكن أن يكون مربعا لعدد زوجي لأن مربع عدد زوجي يكون دائما زوجيا .

من العلاقة السابقة نستنتج أن : $n=2k^2+2k$

إذن : $n+1=2k^2+2k+1=k^2+(k+1)^2$ ، و بالتالي فإن $n+1$ مجموع مربعين كاملين .

3)- الإستدلال بمضاد العكس:

في بعض الوضعيات يكون من الصعب البرهنة مباشرة على صحة الإستلزام $p\Rightarrow q$

يمكن في هذه الحالة أن نبرهن على صحة الإستلزام $\rceil q\Rightarrow \rceil p$ و ذلك لأن :

$$(\rceil q\Rightarrow \rceil p)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$$.

- **مثال:**

لنبين أنه مهما يكن a و b و c من $\mathbb{R}$ لدينا : $a+b>2c \Rightarrow (a>c \text{ أو } b>c)$.

نبين أن : $\rceil(a>c \text{ أو } b>c) \Rightarrow \rceil(a+b>2c)$

أي أن : $(a\le c \text{ و } b\le c) \Rightarrow a+b\le 2c$

إذا كان : $a\le c$ و $b\le c$ ، فإننا نجمع طرفي هاتين المتفاوتتين لنحصل على $a+b\le 2c$ و هذا هو المطلوب .

4)- الإستدلال بالخلف:

العبارة $\left[\neg p \Rightarrow \left(q \text{ و } \neg q\right)\right] \Rightarrow p$ قانون منطقي يسمى قانون الخلف .

و عمليا للبرهنة على أن عبارة ما p صحيحة ، نفترض أنها خاطئة (أي أن $\neg p$ صحيحة)

ثم نبين أن $\neg p \Rightarrow q$ إستلزام صحيح و $\neg q$ عبارة صحيحة فنحصل على تناقض .

(لأن q و $\neg q$ لا يمكن أن تكونا صحيحتين في آن واحد) .

- **مثال:**

لنبين بالخلف أن : $\forall a \in \mathbb{N}\ ;\ \sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}} \notin \mathbb{N}$.

لنفترض أنه يوجد a من $\mathbb{N}$ بحيث : $\sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}} = b$ ، حيث $b \in \mathbb{N}$.
لدينا :

$$\sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}} = b^2 \\ b^2 \geq a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3} = \left(b^2-a^2\right)^2 \\ b^2 \geq a^2+2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2+8a+3 = \left(\left(b^2-a^2\right)^2-4a^2\right)^2 \\ b^2 \geq a^2+2a \end{cases}$$

و هذا يعني أن العدد الصحيح الطبيعي $16a^2+8a+3$ مربع كامل .

و لكن هذا تناقض ، لأن $\left(4a+1\right)^2 < 16a^2+8a+3 < \left(4a+2\right)^2$: لا يوجد مربع كامل

محصور بين المربعين الكاملين المتتابعين $\left(4a+1\right)^2$ و $\left(4a+2\right)^2$.

5)- الإستدلال بالتكافؤات المتتالية:

العبارة $\left[\left(p \Leftrightarrow q\right) \text{ و } \left(q \Leftrightarrow r\right)\right] \Rightarrow \left(p \Leftrightarrow r\right)$ قانون منطقي يسمى قانون التكافؤات المتتالية .

ونستنتج منه ، أنه إذا كان التكافؤان $p \Leftrightarrow q$ و $q \Leftrightarrow r$ صحيحين فإن التكافؤ $p \Leftrightarrow r$ صحيح أيضا .

- **مثال:**

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos^3 x+\sin^3 x=1$.

مهما يكن x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\cos^3 x+\sin^3 x=1 \Leftrightarrow \cos^3 x+\sin^3 x=\cos^2 x+\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\cos^3 x+\sin^2 x-\sin^3 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\left(1-\cos x\right)+\sin^2 x\left(1-\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\left(1-\cos x\right)=0 \text{ و } \sin^2 x\left(1-\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x=0 \text{ أو } \cos x=1\right) \text{ و } \left(\sin x=0 \text{ أو } \sin x=1\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=0 \\ \sin x=1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} \cos x=1 \\ \sin x=0 \end{cases}$$

و بالتالي فإن : $S=\left\{2k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6)- الإستدلال بفصل الحالات:

العبارة $\left[\left(p \Rightarrow q\right) \text{ و } \left(\neg p \Rightarrow q\right)\right] \Rightarrow q$ قانون منطقي يسمى قانون فصل الحالات .

نستنتج من هذا القانون أنه إذا كان الإستلزامان $p \Rightarrow q$ و $\neg p \Rightarrow q$ صحيحين فإن العبارة q تكون صحيحة كذلك .

- **مثال:**

لنحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $(I):\ \sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{x+4}$.

مجموعة تعريف المتراجحة هي (I) : $D=\left\{ x\in\mathbb{R}\ /\ \begin{cases} x+3\geq 0 \\ 2-\sqrt{x+3}\geq 0 \end{cases} \right\}=\left[-3;1\right]$.

و لكل x من D لدينا : $(I) \Leftrightarrow -\left(x+2\right) < \sqrt{x+3}$

- إذا كان $x\in\left[-2;1\right]$ فإن $-\left(x+2\right)\leq 0$ ، و بما أن $\sqrt{x+3}>0$ فإن :

$-\left(x+2\right) < \sqrt{x+3}$ ، هذا يعني أن : $\left[-2;1\right]\subseteq S$.

- إذا كان $x\in[-3;-2]$ فإن $-(x+2)\geq 0$ و لدينا : $(I)\Leftrightarrow x^2+3x+1<0$

جذري الحدودية x^2+3x+1 (في $\mathbb{R}$) هما : $x_1=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

و بما أن $-3<x_1<-2<x_2$ فإن : $(I)\Leftrightarrow x\in]x_1;-2]$

و بالتالي فإن : $S=\left]-\frac{3+\sqrt{5}}{2};-1\right]$.

- **<u>تمرين09:</u>**

أ- بين بفصل حالتين أنه إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا لا يقبل القسمة على 3 ، فإن العدد n^2-1 يقبل القسمة على 3 .

ب- إستنتج بفصل حالتين أن العدد $ab\left(a^2-b^2\right)$ يقبل القسمة على 3 لكل a و b من $\mathbb{N}$.

7)- <u>الإستدلال بالترجع:</u>

- **<u>خاصية04:</u>**

إذا كانت $\mathrm{P}(n)$ دالة عبارية متغيرها n عدد صحيح طبيعي بحيث :

$\mathrm{P}(0)$ عبارة صحيحة و $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \mathrm{P}(n)\Rightarrow\mathrm{P}(n+1)$ ، فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \mathrm{P}(n)$.

- **<u>مثال01:</u>**

لنبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \frac{4n^3-n}{3}\in\mathbb{N}$.

بالنسبة ل $n=0$ لدينا : $\frac{4\times 0^3-0}{3}=0\in\mathbb{N}$ ، إذن $\mathrm{P}(0)$ عبارة صحيحة .

لنفترض أن : $\frac{4n^3-n}{3}\in\mathbb{N}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، و لنبين أن $\frac{4(n+1)^3-(n+1)}{3}\in\mathbb{N}$.

لدينا : $\frac{4(n+1)^3-(n+1)}{3}=\frac{4n^3-n}{3}+4n^2+4n+1$

و بما أن $\frac{4n^3-n}{3}\in\mathbb{N}$ و $4n^2+4n+1\in\mathbb{N}$ فإن : $\frac{4(n+1)^3-(n+1)}{3}\in\mathbb{N}$

و بالتالي فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \frac{4n^3-n}{3}\in\mathbb{N}$

هذا يعني أن العدد $4n^3-n$ يقبل القسمة على 3 ، مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

- **<u>تمرين10:</u>**

بين بالترجع أن العدد $3^{2n+3}+2^{n+3}$ يقبل القسمة على 7 ، مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

- **<u>مثال02:</u>**

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}$.

لدينا : $S_1=\frac{1}{3}$ و $S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$ و $S_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}=\frac{3}{7}$.

لنبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ S_n=\frac{n}{2n+1}$.

نفترض أن : $S_n=\frac{n}{2n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، و لنبين أن : $S_{n+1}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$

لدينا : $S_{n+1}=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)\times(2n+3)}$

أي أن : $S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(2n+1)\times(2n+3)}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)\times(2n+3)}$

إذن : $S_{n+1}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)\times(2n+3)}=\frac{(n+1)\times(2n+1)}{(2n+1)\times(2n+3)}$

و منه فإن : $S_{n+1}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$

و بالتالي لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $S_n=\frac{n}{2n+1}$.

- **<u>تمرين11:</u>**

بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ /\ n\geq 24\ ;\ \exists(a,b)\in\mathbb{N}^2\ /\ n=5a+7b$.