

1- النهاية المنتهية

تعريف 1

f دالة عددية معرفة على مجال منقط مركزه 0. نقول إن الدالة f تؤول إلى الصفر لما تؤول x إلى الصفر و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
إذا فقط إذا كان : $\forall \varepsilon > 0; \exists \alpha > 0 : |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

تطبيق f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x^2}$.

بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ و استنتج أن $\forall x \in]-1; 1[- \{0\} : |f(x)| \leq 3|x|$.

نتائج - $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow 0} ax^n = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} a\sqrt{x} = 0$.

- إذا كان $|f(x)| \leq u(x)$ على مجال منقط مركزه 0 بحيث $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

تطبيق f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$.

بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^* : |f(x)| \leq x^2$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

تعريف 2 f دالة عددية معرفة على مجال منقط مركزه 0. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - l) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \alpha > 0 : |x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

تطبيق f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

بين أن $\forall x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[: |f(x) + 1| < 4|x|$ و استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

تعريف 3 f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه a .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \alpha > 0 : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

خاصية إذا كان $|f(x) - l| \leq u(x)$ على مجال منقط مركزه a بحيث $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

تطبيق 1 لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

1- بين أن $\forall x \in]0; 2[: |f(x) - 2| \leq 7|x - 1|$.

2- استنتج باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

تطبيق 2 لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$.

1- حدد عددا حقيقيا موجبا قطعا k بحيث : $|x+1| \leq \frac{1}{3} \Rightarrow |f(x) - 2| \leq k|x+1|$.

2- استنتج باستعمال التعريف $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

نهاية على اليمين - نهاية على اليسار

❖ f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a; a + \alpha[$. نهاية الدالة f لما تؤول x إلى a على اليمين نرمز له بالرمز

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$. ولدنيا $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \alpha > 0 : x \in]a; a + \alpha[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

❖ f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a - \alpha; a[$. نهاية الدالة f لما تؤول x إلى a على اليسار نرمز له بالرمز

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$. ولدنيا $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \alpha > 0 : x \in]a - \alpha; a[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

$$\diamond \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Leftrightarrow a \text{ تقبل نهاية في } f$$

تطبيق أحسب نهاية الدالة f على يمين وعلى يسار a في الحالات

$$1- \quad (a=1) \quad f(x) = \frac{|x^2 + x - 2|}{x-1}$$

$$2- \quad (a=-2) \quad f(x) = \frac{E(x)}{x}$$

نهاية منتهية عند $+\infty$

تعريف f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a; +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

تطبيق لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

$$1- \quad \text{بين أنه لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^{**} : |f(x)| \leq \frac{1}{2x}$$

$$2- \quad \text{استنتج باستعمال التعريف أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

نهاية منتهية عند $-\infty$

تعريف f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]-\infty; a[$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists B < 0 : x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

خصائص

$$- \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ و } k \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{|x|}} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

$$- \quad \text{إذا كان } |f(x) - l| \leq u(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

$$\text{نهاية الدوال المثلثية} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

2- النهاية اللانتهية

$$- \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ و } k \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{\sqrt{|x|}} = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x^n} = \infty$$

$$- \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k\sqrt{x} = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} kx^n = \infty$$

$$- \quad \text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{f(x)} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} k\sqrt{|f(x)|} = \infty$$

$$- \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$$

$$- \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

3- النهايات والترتيب

$$\diamond \quad \text{إذا كان } g < f < h \text{ وكان } \lim g(x) = \lim h(x) = l \text{ فإن } \lim f(x) = l$$

$$\diamond \quad \text{إذا كان } f \geq u \text{ وكان } \lim u(x) = +\infty \text{ فإن } \lim f(x) = +\infty$$

$$\diamond \quad \text{إذا كان } f \leq u \text{ وكان } \lim u(x) = -\infty \text{ فإن } \lim f(x) = -\infty$$

تطبيقات أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{3x - \pi}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 4} - x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 5} + x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 4}{(x-1)^3} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - 2x}{x^2 - 4x + 3} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x+6} - 3} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$$