المنطق

حسن وراق

التمرين1

نعتبر العبارة (P) التالية : $(P): \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x^2 - xy + y^2 = 0$

أ- اعط نفي العبارة (P) .

ب- بين أن العبارة (P) خاطئة .

التمرين2

باستعمال الاستدلال بالإستلزام المضاد للعكس بين أن :

أ- $a \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.

ب- $\forall x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$.

بين بالترجع كلا من العبارات التالية :

أ- $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n^2+1)^2}{4}$.

ب- $\forall a > 0; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1 + na$.

ج- لكل عدد صحيح طبيعي n العدد : $3^{2n} + 2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11 .

د- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع a_n العدد المكون من n رقم كلها تساوي 7 $(a_1 = 7; a_2 = 77; a_3 = 777; ......)$.

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; a_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$.

ت- $\forall n \geq 24; \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2 : n = 5p + 7q$.

التمرين3

1- بين أن : p^2 زوجي $\Leftrightarrow$ p زوجي $\forall p \in \mathbb{Z}$.

2- بين أن كلا من العددين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ ليس عددا جذريا.

3- بين أن $(\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2 ; a + b\sqrt{2} = 0) \Rightarrow (a = 0 \, et \, b = 0)$.

التمرين4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

1- اعط نفي العبارة $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2); (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$.

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج أن العبارة السابقة خاطئة .

التمرين5

بين أن : $\forall x \in [-2;2] : \sqrt{4-x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$.

بين أن $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}(x+2) > 0$

1- بين أن . $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)(|a| < 1 \, et \, |b| < 1 \Rightarrow |a+b| < |1+ab|)$.

2- بين أن : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{*2})\left(2x + 4y = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq 20\right)$.

3- بين أن $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{*2})\left((xy-1)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1)\right)$.

4- بين أن : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow |ac + bd| \leq 1$ حيث $c;b;a$ و d أعداد حقيقية.

المنطق

حسن وراق

التمرين 6

$c;b;a$ أعداد حقيقية. نعتبر المعادلات التالية :

$$(E_1): x^2-2ax+bc=0$$
$$(E_2): x^2-2bx+ac=0$$
$$(E_3): x^2-2cx+ab=0$$

بين أنه على الأقل إحدى المعادلات السابقة تقبل حلا.

التمرين7

f دالة عددية معرفة على المجال $[0;1]$ بحيث : $(1)\ \forall x\in[0;1], 0\le f(x)\le 1$.

1- بين أن : $|f(1)-f(0)|\le 1$.

2- نفترض أن f تحقق $(2)\ \forall(x;y)\in[0;1]^2 : |f(x)-f(y)|\ge|x-y|$.

بين أن : $|f(1)-f(0)|\ge 1$.

3- بين أنه إذا كانت f تحقق العلاقتين (1) و (2) فإن ($f(0)=1$ و $f(1)=0$) أو ($f(0)=0$ و $f(1)=1$) .

4- بين أن : $f(0)=0 \Rightarrow (\forall x\in[0;1] : f(x)=x)$.

5- -بين أن : $f(0)=1 \Rightarrow (\forall x\in[0;1] : f(x)=1-x)$.

التمرين8

1- a و b من $\mathbb{R}^{*+}$.

أ- بين أن : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$.

ب- بين أن : $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2\ge\frac{1}{2}\ et\ ab\le\frac{1}{4}$.

ج- بين أن : $a+b=1 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{25}{2}$.

2- بين أن : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\left(\frac{|a+b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}<c \Rightarrow |a|<c\ et\ |b|<c\right)$.

hassan205@gmail.com

.

المنطق

حسن وراق