تصحيح التمرين1

نسحب بالتتابع وبدون إحلال ثلاث بيدقات من الكيس الذي يحتوي على ثلاث بيدقات تحمل العدد 2 وبيدقتين تحملان العدد -1 . ليكن Ω كون الإمكانيات .

1- عدد السحبات الممكنة هو : $card\,\Omega = A_5^3 = 5\times4\times3 = 60$.

2- عند سحب ثلاث بيدقات بالتتابع وبدون إحلال نحصل على إحدى الحالات الثلاث :

- ثلاث بيدقات تحمل العدد 2 و بالتالي $X=6$.
- بيدقتان تحملان العدد 2 وبيدقة تحمل العدد -1 وبالتالي $X=3$.
- بيدقتان تحملان العدد -1 وبيدقة تحمل العدد 2 وبالتالي $X=0$.

إذا $X(\Omega)=\{0,3,6\}$.

تحديد قانون احتمال X :

$$p(X=0)=\frac{C_3^2\times A_2^2\times A_1^1}{A_5^3}=\frac{3}{10} \qquad p(X=3)=\frac{C_3^2\times A_2^1\times A_3^2}{A_5^3}=\frac{3}{5}$$

$$p(X=6)=\frac{A_3^3}{A_5^3}=\frac{1}{10}$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x_i	0	3	6
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

تصحيح التمرين 2

1- في هذا السؤال نسحب تآنيا ثلاث كرات من الصندوق إذا فعدد السحبات الممكنة هو : $C_{12}^{3}=220$.

- الحدث A هو : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " إذا : $cardA=C_{7}^{3}+C_{5}^{3}=45$

(ثلاث كرات بيضاء أو ثلاث كرات سوداء) ومنه فإن : $p(A)=\frac{45}{220}=\frac{9}{44}$.

- الحدث B هو : " كرتان تحملان رقما زوجيا و كرة تحمل رقما فرديا " إذا $cardB=C_{7}^{2}\times C_{5}^{1}=105$

(سبع كرات تحمل أرقاما زوجية و خمس كرات تحمل أرقاما فردية) ومنه فإن : $p(B)=\frac{105}{220}=\frac{21}{44}$

- لحساب $p(B/A)$ يجب تحديد $card(A\cap B)$. وبما أن $A\cap B$ هو الحدث : " كرتان تحملان رقما زوجيا و كرة تحمل رقما فرديا وجميعها من نفس اللون " فإن :

$card(A\cap B)=C_{4}^{2}\times C_{3}^{1}+C_{3}^{2}\times C_{2}^{1}=24$ وبالتالي فإن : $p(B/A)=\frac{card(A\cap B)}{cardA}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$.

2- في هذا السؤال نسحب بالتتابع و بإحلال كرتين من الصندوق .

ليكن Ω كون الإمكانيات لدينا : $card\,\Omega=12^{2}=144$.

أ- مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : $X(\Omega)=\{0,1,2,4\}$.

- لدينا $X=0$ في حالات السحب التالية : $(0,0)\,;\,(0,1)\,;\,(1,0)\,;\,(0,2)\,;\,(2,0)$ إذا :

$$p(X=0)=\frac{3^{2}+(2\times3\times5)+(2\times3\times4)}{144}=\frac{63}{144}.$$

- لدينا $X=1$ في حالة السحب التالية : $(1,1)$ إذا : $p(X=1)=\frac{5^{2}}{144}=\frac{25}{144}$.

- لدينا $X=2$ في حالات السحب التالية : $(2,1)\,;\,(1,2)$ إذا $p(X=2)=\frac{2\times5\times4}{144}=\frac{40}{144}$.

- لدينا $X=4$ في حالة السحب التالية : $(2,2)$ إذا $p(X=4)=\frac{4^{2}}{144}=\frac{16}{144}$.

ونلخص النتائج في الجدول التالي :

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{63}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{40}{144}$	$\frac{16}{144}$

ب- لدينا : $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\times p(X=x_i)$ إذا

$$E(X)=\left(0\times\frac{63}{144}\right)+\left(1\times\frac{25}{144}\right)+\left(2\times\frac{40}{144}\right)+\left(4\times\frac{16}{144}\right)=\frac{169}{144}$$

تصحيح التمرين3

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الكيس الذي يحتوي على خمس كرات تحمل العدد 1 و أربع كرات تحمل العدد -1 وثلاث كرات تحمل العدد 0 .

1) ليكن Ω كون الإمكانيات ، عدد السحبات الممكنة هو : $card\,\Omega = C_{12}^{3} = 220$.

2) مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : $X(\Omega) = \{-1,0,1\}$.

أ- تحديد قانون احتمال X :

- للحصول على جداء يساوي-1 يجب أن نسحب ثلاث كرات تحمل العدد -1 أو كرة واحدة تحمل العدد -1 وكرتين تحملان العدد 1. إذا : $p(X=-1) = \dfrac{C_4^3 + C_4^1 \times C_5^2}{220} = \dfrac{44}{220} = \dfrac{1}{5}$.

- للحصول على جداء يساوي 1 يجب أن نسحب ثلاث كرات تحمل العدد 1 أو كرة واحدة تحمل العدد 1 وكرتين تحملان العدد -1 . إذا : $p(X=1) = \dfrac{C_5^3 + C_5^1 \times C_4^2}{220} = \dfrac{40}{220} = \dfrac{2}{11}$.

- للحصول على جداء يساوي 0 يجب أن نسحب على الأقل كرة تحمل العدد 0 .

إذا : $p(X=0) = \dfrac{C_3^3 + C_3^2 \times C_9^1 + C_3^1 \times C_9^2}{220} = \dfrac{136}{220} = \dfrac{34}{55}$.

ونلخص النتائج في الجدول التالي :

1	0	-1	x_i
$\dfrac{2}{11}$	$\dfrac{34}{55}$	$\dfrac{1}{5}$	$p(X=x_i)$

ب- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو : $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \times p(X=x_i) = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{11} = -\dfrac{1}{55}$.

ج- مغايرة المتغير العشوائي X هي : $v(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \left(-\frac{1}{55}\right)^2 = \frac{1154}{3025}$$

ومنه فإن الانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X هو : $\sigma(X) = \sqrt{v(X)} = \dfrac{\sqrt{1154}}{55}$.

3) أ- لكي تكون القيمة المطلقة لمجموع الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يجب أن نسحب :

- كرتين تحملان العدد 0 وكرة تحمل أحد العددين 1 أو -1 .
- كرتين تحملان العدد 1 وكرة تحمل العدد -1 .
- كرتين تحملان العدد-1 وكرة تحمل العدد 1 .

إذا : $p(A) = \dfrac{C_3^2 \times C_9^1 + C_5^2 \times C_4^1 + C_4^2 \times C_5^1}{220} = \dfrac{97}{220}$.

ب- لدينا : $card\left[(X=0)\cap A\right] = C_3^2 \times C_9^1 = 27$ لأن $(X=0)\cap A$ يتحقق عند سحب كرتين تحملان العدد 0 وكرة تحمل أحد العددين 1 أو -1 .

إذا : $p\left[(X=0)/A\right] = \dfrac{p\left[(X=0)\cap A\right]}{p(A)} = \dfrac{\frac{27}{220}}{\frac{97}{220}} = \dfrac{27}{97}$

تصحيح تمرين 4

لدينا $\underbrace{[4R\ ,\ 3V]}_{A}$ و $\underbrace{[5R\ ,\ 4V]}_{B}$

نسحب كرة من B ← حمراء ← نسحب 3 كرات من A بالتتابع و بدون إحلال .

نسحب كرة من B ← خضراء ← نسحب 3 كرات تآنيا من B .

ليكن Ω كون الإمكانيات لدينا : $card\,\Omega = C_5^1 \times A_8^3 + C_4^1 \times C_8^3 = 1904$.

1) ليكن C الحدث : " الحصول على أربع كرات حمراء "

للحصول على أربع كرات حمراء يجب سحب كرة حمراء من B وثلاث كرات حمراء من A .

إذا : $cardC = C_5^1 A_5^3 = 300$ ومنه : $p(C) = \frac{300}{1904} = \frac{75}{476}$.

2) ليكن D الحدث : " الحصول على كرتين حمراوين بالضبط "

للحصول على كرتين حمراوين بالضبط يجب سحب (كرة حمراء من B و كرة حمراء وكرتين خضراوين من A) أو (كرة خضراء من B وكرتين حمراوين وكرة خضراء من B)

إذا $cardD = C_5^1 \times 3 \times A_5^1 \times A_3^2 + C_4^1 \times C_5^2 \times C_3^1 = 570$ ومنه : $p(D) = \frac{570}{1904} = \frac{285}{952}$.

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

لدينا : $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

أ- لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X=0) = \frac{C_4^1 \times C_3^3}{1904} = \frac{4}{1904} = \frac{1}{476}$$

$$p(X=1) = \frac{C_5^1 \times A_3^3 + C_4^1 \times C_5^1 \times C_3^2}{1904} = \frac{90}{1904} = \frac{45}{952}$$

$$p(X=2) = p(D) = \frac{285}{952}$$

$$p(X=3) = \frac{C_5^1 \times 3 \times A_5^2 \times A_3^1 + C_4^1 \times C_5^3}{1904} = \frac{940}{1904} = \frac{235}{476}$$

$$p(X=4) = p(C) = \frac{75}{476}$$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{476}$	$\frac{45}{952}$	$\frac{285}{952}$	$\frac{235}{476}$	$\frac{75}{476}$

ب- $E(X) = 0 \times \frac{1}{476} + 1 \times \frac{45}{952} + 2 \times \frac{285}{952} + 3 \times \frac{235}{476} + 4 \times \frac{75}{476} = \frac{2625}{952}$

4) نستعمل في هذا السؤال قانونا حدانيا وسيطاه $n = 4$ و $p = p(C) = \frac{75}{476}$ إذا فالاحتمال المطلوب

هو : $C_4^3 \left(\frac{75}{476}\right)^3 \left[1 - \frac{75}{476}\right]$ أي $\left(\frac{401}{119}\right)\left(\frac{75}{476}\right)^3$