مرضي عبد اللطيف

ملخص درس الاحتمالات

I - التجارب العشوائية

- كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة ممكنة تسمى تجربة عشوائية أو اختبارا وكل نتيجة ممكنة لتجربة عشوائية تسمى إمكانية
- مجموعة الإمكانيات تسمى كون الإمكانيات ونرمز لها عادة بالرمز Ω وكل جزء من Ω يسمى حدثا .
- إذا كانت نتيجة تجربة عشوائية تنتمي إلى الحدث A فإننا نقول بأن الحدث A قد تحقق أو وقع .
- إذا تحقق الحدث A والحدث B في نفس الوقت فإننا نقول بأن الحدث $A \cap B$ قد تحقق .
- إذا تحقق أحد الحدثين A و B أو هما معا فإننا نقول بأن الحدث $A \cup B$ قد تحقق .
- الحدث الأكيد هو Ω و الحدث المستحيل هو $\varnothing$.
- الحدث الابتدائي هو الحدث الذي يحتوي على إمكانية واحدة .
- نقول عن حدثين A و B أنهما غير منسجمين إذا كان $A \cap B = \varnothing$ أي أنهما لا يتحققان في نفس الوقت .
- نقول عن حدثين A و B أنهما متضادان إذا كان $A \cap B = \varnothing$ و $A \cup B = \Omega$ ونكتب $\overline{A} = B$ أو $\overline{B} = A$

II - الفضاءات الاحتمالية المنتهية

- لتكن $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ مجموعة منتهية . إذا ربطنا كل عنصر a_i من Ω بعدد p_i من المجال $[0,1]$ وكان مجموع الأعداد p_i يساوي 1 فإننا قد عرفنا احتمالا p على Ω .
- احتمال الحدث الابتدائي $\{a_i\}$ هو العدد p_i ونكتب $p(\{a_i\}) = p_i$.
- الزوج (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا.
- احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي توجد ضمن A .
- $p(\Omega) = 1$ و $p(\varnothing) = 0$. ولكل حدث A من Ω لدينا : $0 \le p(A) \le 1$.
- لكل حدثين A و B لدينا $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
وإذا كان A و B حدثين غير منسجمين $(A \cap B = \varnothing)$ فإن $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- لكل حدث A من Ω لدينا : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في كون Ω فإن احتمال حدث A هو : $p(A) = \dfrac{card A}{card \Omega}$.

III - الاحتمال الشرطي

- ليكن A و B حدثين ضمن فضاء احتمالي منته بحيث $p(A)\neq 0$.
احتمال الحدث B علما أن الحدث A قد تحقق هو :
$$p_A(B)=p\left(B/A\right)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)} .$$
- في حالة تساوي احتمالات الأحداث الابتدائية فإن : $p_A(B)=\frac{card\,(A\cap B)}{card\,\Omega}$.
- لكل حدثين A و B لدينا : $p(A\cap B)=p_A(B)\times p(A)=p_B(A)\times p(B)$

IV - الاستقلالية

ليكن A و B حدثين ضمن فضاء احتمالي منته ، نقول إن A و B مستقلان إذا كان :
$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

V- المتغيرات العشوائية

- ليكن (Ω,p) فضاءا احتماليا منتهيا .

التطبيق الذي يربط كل حدث ابتدائي بعدد حقيقي يسمى متغيرا عشوائيا ونرمز له بالرمز X أو Y ....
$$X:\Omega\to\mathbb{R}$$
$$\omega_i\to X(\omega_i)$$
- مجموعة الصور بالتطبيق X تكتب $X(\Omega)$ وهي مجموعة قيم X .
- نكتب عادة $X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,.........,x_n\}$ حيث : $x_1<x_2<x_3<..........<x_n$.
- نرمز للحدث : " X تأخذ القيمة x_i " ب $(X=x_i)$.
- الكتابة $(X\leq x_i)$ تعبر عن الحدث " X تأخذ قيمة أصغر من أو تساوي x_i"

- قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق f المعرف بما يلي :
$$f:X(\Omega)\to[0,1]$$
$$x_i\to f(x_i)=p(X=x_i)$$
يتم عادة تحديد قانون احتمال متغير عشوائي X في جدول كالتالي :

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	....	p_n

دون أن ننسى التأكد من أن : $\sum_{i=1}^{n}p_i=p_1+p_2+.........+p_n=1$

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي :

$\overline{X}=E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i.p(X=x_i)=x_1\times p(X=x_1)+.........+x_n\times p(X=x_n)$.

- العدد الحقيقي : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2$ يسمى مغايرة المتغير العشوائي X .

ويمكن استعمال الصيغة $V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2.p(X=x_i)\right]-\left[E(X)\right]^2$.

- العدد الحقيقي : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ يسمى الانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X .
- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=p(X<x)$ $(x\in\mathbb{R})$ تسمى دالة التجزيئ للمتغيرالعشوائي X

VI- التوزيع الحداني

- عندما تكون لدينا اختبارات عشوائية تتكرر n مرة وتحقق :

1- الاختبارات مستقلة عن بعضها البعض .

2- كل تجربة تؤدي إلى حالتين : نجاح احتماله p و فشل احتماله $q=1-p$.

فإن المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد النجاحات المحصل عليها خلال هذه الاختبارات يتبع قانونا أو توزيعا حدانيا وسيطاه n و p ولدينا :

$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(0\le k\le n)$ و $E(X)=np$ و $V(X)=np(1-p)$