2^{EM} Bac Sc Mat	**نهايات و إتصال دالة عددية**	**Prof :Abdellah.BEN ELKHATIR**
Année scolaire : 2007/2008	**Limites et Continuité d'une fonction numérique**	**Lycée alfath**

I- إتصال دالة عددية على مجال و التمديد بالإتصال في نقطة:

1)- إتصال دالة عددية على مجال:

- **تعريف:**

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عنصر من I.

- نقول إن f متصلة في النقطة x_0 إذا كان : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

و نقول إن f متصلة على المجال I إذا كانت متصلة في كل نقطة من I .

- نقول إن f متصلة في النقطة x_0 على اليمين إذا كان : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

و متصلة في x_0 على اليسار إذا كان : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

■ **خاصية01:**

تكون دالة عددية f متصلة في نقطة x_0 إذا و فقط إذا كانت متصلة في x_0 على اليمين و على اليسار .

- **تعريف:**

نقول إن دالة عددية f متصلة على مجال مغلق $[a;b]$ إذا كانت متصلة على المجال $]a;b[$ و في a على اليمين و في b على اليسار .

■ **خاصية02:**

- الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$ ، و الدوال الجذرية متصلة على مجموعة تعريفها .
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على المجال $[0;+\infty[$ و الدالة $x \mapsto \sqrt{|x|}$ متصلة على $\mathbb{R}$.
- الداليتن $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتين على $\mathbb{R}$ ، و الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- **تمرين01:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = x.E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

أ- بين أن f متصلة على المجالين $I_k = \left]\dfrac{1}{k+1};\dfrac{1}{k}\right[$ و $J_k = \left]\dfrac{-1}{k};\dfrac{-1}{k+1}\right[$ لكل k من $\mathbb{N}^*$.

ب- أدرس إتصال f في $x_0 = \dfrac{1}{k}$ لكل k من $\mathbb{Z}^*$ ، ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2)- التمديد بالإتصال في نقطة:

■ **خاصية و تعريف:**

إذا كانت f تقبل نهاية منتهية L في نقطة x_0 حيث $x_0 \notin D_f$ ، فإن الدالة φ المعرفة على $D_f \cup \{x_0\}$ بما يلي : $\begin{cases} \varphi(x) = f(x) \;;\; x \in D_f \\ \varphi(x_0) = L \end{cases}$ متصلة في x_0 و تسمى تمديدا بالإتصال ل f في النقطة x_0 .

- **تمرين02:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x}}$.

1)- حدد D_f ، ثم أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2)- بين أن f تقبل تمديدا بالإتصال φ في النقطة $x_0 = 1$ و حدده .

- **تمرين03:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x^3+|x|}$.

1)- حدد D_f ، ثم أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

2)- هل الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في $x_0 = 0$ ؟

- **تمرين04:**

بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال φ في النقطة x_0 ثم حدده ، في الحالات التالية :

$(1) : f(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+x^3} \;;\; x_0 = -1$ ، $(2) : f(x) = \dfrac{2-\sqrt{-2x}}{2-\sqrt{x+6}} \;;\; x_0 = 2$

و $(3) : f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{-2x^2+x+6} \;;\; x_0 = 2$.

II- العمليات على الدوال المتصلة:

■ **مبرهنة01:**

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين في نقطة x_0 فإن $f+g$ و $f.g$ متصلتين في x_0 .
- و بصفة عامة إذا كانت f و g متصلتان على مجال مفتوح I فإن $f+g$ و $f.g$ متصلتان أيضا على I .

■ **مبرهنة02:**

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين في نقطة x_0 و $g(x_0)\neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتين في x_0 .
- و بصفة عامة إذا كانت f و g متصلتان على مجال مفتوح I و $g(x)\neq 0$ لكل x من I فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتان أيضا على I .

• **تمرين05:**

حدد D_f ثم أدرس إتصال f على في كل حالة من الحالات التالية :

$(1): f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ ، $(2): f(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-6}$ و $(3): f(x)=\frac{\sin x}{|x|^3+x}$.

III- نهاية و إتصال مركب دالتين:

1)- نهاية مركب دالتين:

■ **مبرهنة03:**

إذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح I و منقط مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J يتضمن $f(I)$ فإن : $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0 \text{ و } \lim_{y\to y_0} g(y)=L\right)\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g\circ f(x)=L$.

حيث y_0 و L عنصرين من $\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$.

• **ملحوظة:**

الخاصية السابقة تبقى صحيحة لما يكون I مجالا مفتوحا و x_0 محد من محداته .

• **مثال01:**

لنحدد النهاية : $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

نعتبر الدالتين f و g بحيث : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $g(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$.

من جهة $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty} g\circ f(x)$ ، و من جهة أخرى : $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\\ \lim_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}$.

• **مثال02:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ب : $f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$.

و لنحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f\circ f(x)$.

لدينا من جهة : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ ، مع ($\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[: f(x)>\frac{1}{2}$)

و من جهة أخرى لدينا : $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=+\infty$ ، إذن : $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)=+\infty$.

• **تمرين06:**

أحسب النهاية : $(1): \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\times\cos\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ ، ثم إستنتج النهاية : $(2): \lim_{x\to-\infty} x.\cos\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

2)- إتصال مركب دالتين:

■ **مبرهنة04:**

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجالين I و J بحيث : $f(I)\subset J$.

إذا كانت f متصلة في نقطة x_0 من I و g متصلة في $f(x_0)$ فإن $g\circ f$ تكون متصلة في x_0

و بصفة عامة ، إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J فإن $g\circ f$ تكون متصلة على I .

• **تمرين07:**

بين أن الدالة $h: x\mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ متصلة على D_h .

■ **خاصية03:**

- إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن الدالة : $u : x \mapsto |f(x)|$ متصلة على I .
- إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على مجال I فإن الدالة : $v : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ متصلة على I .

• **تمرين08:**

أدرس إتصال الدالة : $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4x+3}}$ على D_h .

3)- نهاية مركب دالة متصلة و دالة تقبل نهاية:

■ **مبرهنة05:**

إذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح I و منقط مركزه x_0 و دالة معرفة على مجال J

بحيث : $f(I) \subset J$ ، فإن :

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ و متصلة في } L \right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = g(L) .$$

• **ملحوظة:**

الخاصية السابقة تبقى صحيحة لما يكون I مجالا مفتوحا و x_0 محد من محداته .

• **مثال:**

لنحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2\left(1-\sqrt{x+1}\right)}\right)$.

لدينا : $\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[: \dfrac{\pi x}{2\left(1-\sqrt{x+1}\right)} = -\dfrac{\pi\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{2}$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi x}{2\left(1-\sqrt{x+1}\right)} = -\pi$. و بما أن الدالة $x \mapsto \cos x$ متصلة في $x_0 = -\pi$

فإن : $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2\left(1-\sqrt{x+1}\right)}\right) = \cos(-\pi) = -1$.

4)- نهاية مركب متتالية و دالة متصلة:

■ **مبرهنة06:**

إذا كانت f دالة عددية معرفة على مجال I و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حدودها عناصر من I بحيث :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

حيث a و b و L عناصر من $\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$.

• **مثال:**

لنحدد نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}^* : v_n = \sqrt{n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

لدينا : $v_n = f(u_n)$ حيث : $u_n = \dfrac{1}{n}$ و $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}$ (f معرفة على $]0;1]$)

و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$.

من المبرهنة السابقة نستنتج الخاصية التالية :

■ **خاصية04:**

إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية بحيث : $u_n = f(n)$ ، حيث f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

■ **مبرهنة07:**

لتكن f دالة معرفة على مجال I و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية حدودها عناصر من I .

إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نهايتها L تنتمي إلى I و كانت f متصلة في L فإن :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(L)$.

• **ملحوظة:**

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}^* : v_n = E\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

لدينا : $v_n = f(u_n)$ ، حيث $u_n = 1-\dfrac{1}{n}$ و $f(x) = E(x)$.

و بالرغم من أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ فإن $v_n = f(u_n)$ لا تؤول إلى $f(1)=1$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$)

لأن f غير متصلة في 1 على اليسار .

إذن ، إتصال f في L شرط لازم لكي يكون : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(L)$.

IV- صورة مجال بدالة متصلة و مبرهنة القيم الوسيطية:

1)- صورة مجال بدالة متصلة:

- **تمرين09:**

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\begin{cases}1-x^2 \ ; \ x\leq 1\\ x-1 \ ; \ x>1\end{cases}$.

1)- بين أن f متصلة على $\mathbb{R}$ ، ثم أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2)- حدد مبيانيا صورة كل مجال من المجالات التالية بالدالة f : $I=[1;4]$ ، $J=[-3;-1]$

$K=[-2;1]$ ، $L=[2;+\infty[$ ، $M=]-\infty;0[$ و $N=]-\infty;4]$.

- **تمرين10:**

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

حدد $f(]1;5])$ و $f(]-\infty;1[)$ و $f(]3;5[)$ و $f\,]-\infty;-1]$.

- ■ **مبرهنة08:**

صورة مجال بدالة متصلة يكون مجالا ، و صورة قطعة بدالة متصلة هي أيضا قطعة .

- **ملحوظة:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\begin{cases}-1 \ ; \ x\leq 0\\ 1 \ ; \ x>0\end{cases}$

إذا كان I مجالا من $\mathbb{R}$ بحيث : $I\cap]0;+\infty[\neq\varnothing$ و $I\cap]-\infty;0[\neq\varnothing$ فإن :

$f(I)=\{-1;1\}$ ، إذن $f(I)$ ليس مجالا .

و بالتالي فإتصال الدالة f شرط لازم لكي يكون $f(I)$ مجالا (الدالة f متقطعة في 0)

- ■ **مبرهنة09:**

إذا كانت f دالة عددية متصلة على مجال $[a;b]$ فإن : $f([a;b])=[m;M]$ حيث :

$m=\inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ و $M=\sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

- ■ **خاصية05:**

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a;b]$.

إذا كانت f تزايدية قطعا فإن : $f([a;b])=[f(a);f(b)]$ ، و إذا كانت تناقصية قطعا

فإن : $f([a;b])=[f(b);f(a)]$.

2)- مبرهنة القيم الوسيطية:

- ■ **مبرهنة10:**

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ ، فلكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

المعادلة : $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$.

و بصفة خاصة :

- ■ **خاصية06:**

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[a;b]$ ، فالمعادلة : $f(x)=k$ تقبل

حلا وحيدا في المجال $[a;b]$ لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

- **ملحوظة:**

يمكن تطبيق الخاصية السابقة على مجال مفتوح و غير محدود باستعمال نهايتي الدالة f .

مثلا ، إذا كانت f متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty;a[$ فلكل k من $\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

المعادلة : $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;a[$.

- ■ **خاصية07:**

إذا كانت f متصلة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a).f(b)<0$ فإن المعادلة : $f(x)=0$

تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$.

■ **خاصية08:**

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a;b]$ و كان $f(a).f(b)<0$ فإن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

• **تمرين11:**

1)- بين أن المعادلة $(E_1):\ x^3-2x^2+4x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ينتمي إلى المجال $]0;1[$ ، ثم اعط قيمة مقربة ل α بالدقة $r=0,25$.

2)- بين أن المعادلة $(E_2):\ x^3-3x+1=0$ تقبل ثلاث حلول في $\mathbb{R}$ ، و اعط قيمة مقربة لكل حل من هذه الحلول بالدقة $r=0,1$.

V- الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال:

■ **مبرهنة11:**

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإن f تقابل من I نحو المجال $J=f(I)$ تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة على J و لها نفس منحى تغيرات f و $(C_{f^{-1}})$ هو مماثل (C_f) بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

• **ملحوظة:**

الجدول التالي يلخص طبيعة المجال $J=f(I)$ تبعا لطبيعة المجال I و رتابة الدالة f :

المجال I	المجال $J=f(I)$	
	f تزايدية قطعا على I	f تناقصية قطعا على I
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);f(a)\right]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);f(a)\right]$
$]-\infty;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$

• **تمرين12:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

و ليكن g و h قصوري f على المجالين $I=]-\infty;-2]$ و $K=]-1;0]$ على التوالي .

1)- بين أن g تزايدية قطعا على I ، ثم إستنتج أن g تقبل من I نحو مجال J يجب تحديده .

2)- بين أن h تناقصية قطعا على K ، ثم إستنتج أن h تقابل من K نحو مجال L يجب تحديده .

3)- حدد التقابلين العكسيين g^{-1} و h^{-1} للتقابلين g و h على التوالي .

■ **تطبيقات:**

1)- دالة قوس الظل:

الدالة $f:x\mapsto \tan x$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ فإن f تقابل من I نحو $\mathbb{R}$.

■ **مبرهنة12:**

الدالة $f:x\mapsto \tan x$ تقابل من $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$ ، تقابله العكسي يسمى دالة قوس الظل و يرمز له بالرمز $\arctan$.

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}:\ y=\arctan x \iff \begin{cases}\tan y=x\\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

■ **خاصية09:**

الدالة $\arctan$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ و هي دالة فردية و تحقق ما يلي :

$\forall x\in\mathbb{R}:\ \tan(\arctan x)=x$ و $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[:\ \arctan(\tan x)=x$

و $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2:\ \begin{cases}\arctan x=\arctan y\iff x=y\\ \arctan x<\arctan y\iff x<y\end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$.

- **تمرين13:**

1)- بين أن :

$$\arctan\left(\frac{5}{2}\right)+\arctan\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{3\pi}{4} \quad \text{و} \quad \arctan 2+\arctan 5+\arctan 8=\frac{5\pi}{4} .$$

2)- أثبت أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{و} \quad \sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{و} \quad 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\arctan x=\frac{\pi}{2} .$$

3)- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\arctan x+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\varepsilon\frac{\pi}{2} \text{ ، حيث : } \varepsilon=\begin{cases}1\ ;\ x>0\\-1\ ;\ x<0\end{cases} .$$

- **تمرين14:**

1)- حدد مجموعتي تعريف الدالتين f_1 و f_2 حيث :

$$f_1(x)=\tan(2\arctan x) \quad \text{و} \quad f_2(x)=\tan(3\arctan x) .$$

ثم بين أن : $\forall x\in D_{f_1} : f_1(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$ و $\forall x\in D_{f_2} : f_2(x)=\dfrac{x(3-x^2)}{1-3x^2}$.

2)- أحسب النهايات التالية :

$$(1):\ \lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x^2+2x} \text{ ، } (2):\ \lim_{x\to0}\frac{\arctan(x^2-3x)}{x^3} \text{ ، } (3):\ \lim_{x\to\pm\infty}\arctan\left(\frac{1-x^2}{2+\sqrt{3}x^2}\right)$$

$$(4):\ \lim_{x\to\pm\infty}x^3\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{و} \quad (5):\ \lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2}.\arctan\left(\frac{x+2}{x-2}\right) .$$

2)- دالة الجذر من الرتبة n حيث $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq2$:

لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geq2$ ، الدالة $f:x\mapsto x^n$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$

و بما أن : $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ فإن f تقابل من $\mathbb{R}_+$ نحو $\mathbb{R}_+$

تقابله العكسي يسمى دالة الجذر من الرتبة n و يرمز له بالرمز $\sqrt[n]{\ }$.

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}_+ : y=\sqrt[n]{x}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in\mathbb{R}_+\\y^n=x\end{cases}$.

العدد $\sqrt[n]{x}$ يقرأ جذر x من الرتبة n ، و بصفة خاصة : $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ و هو الجذر المربع ل x و $\sqrt[3]{x}$ يقرأ الجذر المكعب ل x .

- **خاصية10:**

- الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{\ }$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$ و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.

- لكل $(x;y)$ من $\mathbb{R}_+^2$ لدينا : $\left.\begin{array}{l}y=\sqrt[n]{x}\ \Leftrightarrow\ y^n=x\\\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=\sqrt[n]{x^n}=x\end{array}\right\}$ و $\begin{cases}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x=y\\\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x<y\end{cases}$.

- **تمرين15:**

1)- حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية :

$(1):\ x^7=128$ ، $(2):\ x^4=32$ ، $(3):\ x^5=-32$ و $(4):\ x^{10}=-32$.

2)- ناقش تبعا لقيم a من $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المعادلة : $(E):\ x^n=a$.

- **العمليات على الجذور من الرتبة n :**

- **خاصية11:**

لكل $(x;y)$ من $\mathbb{R}_+^2$ و لكل $(n;p)$ من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث $n\geq2$ و $p\geq2$ لدينا :

$$\sqrt[np]{x^p}=\sqrt[n]{x} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}=\sqrt[np]{x} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x.y}=\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} \quad \text{و} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^p=\sqrt[n]{x^p}$$

$$\sqrt[n]{x}.\sqrt[p]{x}=\sqrt[np]{x^{n+p}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\ /\ y\neq0 .$$

- **إتصال مركب دالة عددية f و الدالة $\sqrt[n]{\ }$:**

- **خاصية12:**

- إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على مجال I فإن الدالة : $\sqrt[n]{f}:x\mapsto\sqrt[n]{f(x)}$ تكون أيضا متصلة على I .

- إذا كانت f دالة موجبة على مجال مفتوح I و منقط مركزه x_0 (أو x_0 محد من محداته)

فإن : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\ \Rightarrow\ \left(L\geq0 \text{ و } \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}\right)$

و $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$.

• **تمرين16:**

1)- أكتب كل عدد من الأعداد التالية على شكل كسر مقامه جذري :

$a=\frac{1}{2-\sqrt[3]{5}}$ و $b=\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$ و $c=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ و $d=\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$.

2)- أحسب كل نهاية من النهايات التالية :

$(1):\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt[3]{x+8}}$ و $(2):\ \lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}$ و $(3):\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{x+1}}{2-\sqrt[3]{x+8}}$

$(4):\ \lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{2x}}{x-8}$ و $(5):\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x+\sqrt[3]{x^2}}}$ و $(6):\ \lim\limits_{x\to +\infty} x-\sqrt[3]{x^3-x^2}$

$(7):\ \lim\limits_{x\to -\infty} x+\sqrt[4]{x^4+1}$ و $(8):\ \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[12]{x}\,\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}$.

3)- <u>القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:</u>

• **<u>تعريف:</u>**

ليكن x عددا حقيقيا موجب قطعا و $r=\frac{m}{n}$ عدد جذري غير منعدم ($m\in\mathbb{Z}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*$)

العدد الحقيقي الموجب قطعا $\sqrt[n]{x^m}$ يسمى القوة الجذرية ل x ذات الأس r و يرمز له

بالرمز x^r ، إذن : $x^r=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$.

• **<u>ملحوظة:</u>**

لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ و لكل n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ لدينا : $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x^1}=x^{\frac{1}{n}}$ ، و بصفة خاصة :

$\sqrt{x}=\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}$.

• **<u>أمثلة:</u>**

$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$ و $5^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{5^7}=\sqrt[6]{5^6}.\sqrt[6]{5}=5\sqrt[6]{5}$

و $27^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{27^{-4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(3^4\right)^3}}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$.

■ **<u>خاصية13:</u>**

لكل x و y من $]0;+\infty[$ و لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$ لدينا :

$x^{r+r'}=x^r.x^{r'}$ و $\left(x^r\right)^{r'}=x^{r.r'}$ و $(x.y)^r=x^r.y^r$

$\left(\frac{x}{y}\right)^r=\frac{x^r}{y^r}$ و $x^{-r}=\frac{1}{x^r}$ و $\frac{x^r}{x^{r'}}=x^{r-r'}$.

• **<u>تمرين17:</u>**

1)- قارن العددين $a=\sqrt[4]{2}$ و $b=\sqrt[7]{3}$.

2)- بسط العددين $c=\frac{\sqrt[5]{162}.\sqrt[4]{9}.\sqrt{3}}{\sqrt[6]{128}}$ و $d=\frac{27^{\frac{2}{9}}\times 81^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$.

3)- هل الدالتين العدديتين $f:x\mapsto\sqrt[3]{x^2}$ و $g:x\mapsto x^{\frac{2}{3}}$ متساويتان ؟ علل جوابك .

abouzakariya@yahoo.fr