I- تذكير:

1)- أنشطة:

- **تمرين01:**

1)- حدد D_f ثم أحسب نهاية الدالة f (إذا وجدت) عند x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

$(1):\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6} \\ x_0\in\left\{-3,\dfrac{2}{3}\right\}\end{cases}$ و $(2):\begin{cases} f(x)=\dfrac{-2x^2-x+6}{(x+2)^3} \\ x_0=-2\end{cases}$

و $(3):\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x^3+|x|} \\ x_0\in\{-1,0\}\end{cases}$.

2)- حدد تبعا لقيم العدد n من $\mathbb{N}$ نهاية الدالة $g:x\mapsto x^n-x^{11}-3x^8+10$ عند $-\infty$.

3)- حدد تبعا لقيم العدد n من $\mathbb{N}$ نهاية الدالة $h:x\mapsto \dfrac{x^n-x^8-x^4+3}{x^8+4}$ عند $-\infty$.

- **تمرين02:**

1)- أحسب النهايات التالية :

$(1):\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-6}{2-\sqrt{x+1}}$ و $(2):\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-6}$ و $(3):\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x\sqrt{x}-27}{3-\sqrt{x}}$

$(4):\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{-2x^2+x+6}$ و $(5):\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2|x|-\sqrt{4x^2-1}}{x+1}$

$(6):\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-2\sqrt{x}}$ و $(7):\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+1}}$.

2)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3+x^2}}{x-\sqrt{x}}$.

أ- حدد D_f ، ثم أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- أثبت أن الدالة f تقبل عند $x_0=1$ تمديدا بالإتصال g ، ثم حدده .

- **تمرين03:** أحسب النهايات التالية :

$(1):\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-x^3}{1-\cos3x}$ و $(2):\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)}{\sin^2 2x}$ و $(3):\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin3x}{1-2\cos x}$

$(4):\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\sin x}$ و $(5):\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\cos x}$ و $(6):\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan3x}{1-2\cos x}$

$(7):\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)\tan(\pi x)$ و $(8):\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos x\cos3x}{1+\cos^3 x}$.

- **تمرين04:**

1)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin2x}{x^3+|x|}$.

أ- حدد النهايتين : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$.

ب- هل الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال عند $x_0=0$ ؟

2)- بين أن الدالة العددية f تقبل تمديدا بالإتصال g عند x_0 ثم حدده في الحالات التالية :

$(1):f(x)=\dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+x^3};x_0=-1$ و $(2):f(x)=\dfrac{2-\sqrt{-2x}}{2-\sqrt{x+6}};x_0=-2$

و $(3):f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x+3}}{(4x+1)(x-2)};x_0=2$.

2)- ملخص:

- **تعريف:**

لتكن f دالة عددية تحتوي مجموعة تعريفها على مجال مفتوح I و x_0 عنصر من I

نقول إن f متصلة عند x_0 إذا كان : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

و نقول إن f متصلة على المجال I إذا كانت متصلة في كل نقطة من I .

- **خاصية01:**

- الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$ ، و الدوال الجذرية متصلة على مجموعة تعريفها .
- نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة ، و نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة .

- **خاصية02:**

- الدالتين $u : x \mapsto \sin x$ و $v : x \mapsto \cos x$ متصلتين على $\mathbb{R}$ و الدالة $f : x \mapsto \tan x$ على مجموعة تعريفها $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- نهايات مثلثية مرجعية: لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

- **خاصية03:**

لتكن f دالة عددية تحتوي مجموعة تعريفها على مجال مفتوح I و منقط مركزه x_0

إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ و $f \geq 0$ على I فإن $L \geq 0$ و $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

- **خاصية04:**

- إذا كانت f دالة متصلة على مجال مفتوح I فإن الدالة $|f| : x \mapsto |f(x)|$ متصلة أيضا على I .
- إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال مفتوح I فإن الدالة $\sqrt{f} : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ متصلة أيضا على I .

3)- النهايات و الترتيب:

- **خاصية05:**

إذا وجد مجال I مفتوح و منقط مركزه x_0 (أو x_0 محد من محدات I) و ثلاث دوال عددية f و g و h بحيث : $\forall x \in I : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فإن :

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

- **تمرين05:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

أ- حدد D_f ، ثم بين أن : $\forall x \in]-1,1[- \{0\} : |f(x)| < 2|x|$ و استنتج $\lim_{x\to 0} f(x)$.

ب- بين أن : $\forall x \in]-\infty,0[: f(x) \leq \dfrac{x\sqrt{3-x}}{3}$ ، ثم إستنتج النهايتين :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

ج- أحسب النهايات التالية :

$$(1): \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2 - x\cos x + 1}{x^2+2} \quad \text{و} \quad (2): \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin x}{x-1} \quad \text{و} \quad (3): \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x-\cos x}$$

و $(4): \lim_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^3}{1+x^2\sin^2 x}$.

II- نهاية مركب دالتين عدديتين:

- **تذكير:**

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجالين I و J على التوالي بحيث $f(I) \subseteq J$

نسمي مركب f و g (في هذا الترتيب) الدالة h المعرفة على I ب :

$h(x) = g\left[f(x)\right]$ لكل x من I .

يرمز للدالة h ب $g \circ f$ و لدينا : $g \circ f : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g \circ f(x) = g\left[f(x)\right] \end{vmatrix}$

و بصفة عامة ، إذا كانت f و g دالتين عدديتين معرفتين على D_f و D_g على التوالي فإن :

$$D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\right\} \quad \text{و} \quad \forall x \in D_{g\circ f} : g\circ f(x) = g\left[f(x)\right]$$

1)- نهاية مركب دالتين عدديتين:

- **خاصية06:**

إذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح I و منقط مركزه x_0 و g دالة معرفة على J يتضمن $f(I)$ فإن :

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \text{ و } \lim_{y\to y_0} g(y) = L\right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = L$$

حيث y_0 و L عنصرين من $\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$.

- **ملحوظة:**

الخاصية السابقة تبقى صحيحة لما يكون I مجالا مفتوحا و x_0 محد من محداته .

- **مثال01:**

لنحدد $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

نعتبر الدالتين العدديتين f و g بحيث : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $g(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty} g\circ f(x)$ و $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\\ \lim_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{2}\end{cases}$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}$

- **مثال02:**

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ بما يلي : $f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$

لنحدد النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f\circ f(x)$.

لدينا من جهة : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ مع $f(x)>\frac{1}{2}$) على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$)

و من جهة أخرى : $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=+\infty$ ، إذن : $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)=+\infty$.

- **تمرين06:**

أحسب النهاية : $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cos\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ ، ثم إستنتج النهاية :

$\lim_{x\to-\infty} x\cos\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

2)- إتصال مركب دالتين عدديتين:

- **خاصية07:**

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجالين I و J على التوالي بحيث $f(I)\subseteq J$

إذا كانت f متصلة في نقطة x_0 و g متصلة في $f(x_0)$ فإن $g\circ f$ متصلة في x_0 .

و بصفة عامة ، إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J فإن $g\circ f$ متصلة على I .

- **مثال:**

لندرس إتصال الدالة العددية h المعرفة ب : $h(x)=\sin\left(\frac{x^3}{x^2-4x+3}\right)$.

لدينا : $h=g\circ f$ حيث $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4x+3}$ و $g(x)=\sin x$

الدالة f متصلة على مجوعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}-\{1,3\}$ (لأنها دالة جذرية) و الدالة g

متصلة على $\mathbb{R}$ و بما أن $f(D_f)\subseteq\mathbb{R}$ ، فإن $h=g\circ f$ متصلة على $D_f=\mathbb{R}-\{1,3\}$

و بالتالي فالدالة h متصلة على $D_h=\mathbb{R}-\{1,3\}$.

- **تمرين07:**

أدرس إتصال الدالة العددية h المعرفة بما يلي : $h(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ على D_h .

3)- نهاية مركب دالة متصلة و دالة تقبل نهاية:

- **خاصية08:**

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I مفتوح و منقط مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subseteq J$ ، فإن :

($\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ و g متصلة في L) $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g\circ f(x)=g(L)$

- **ملحوظة:**

الخاصية السابقة تبقى صحيحة لما يكون I مجالا مفتوحا و x_0 محد من محداته .

- **تمرين08:** حدد النهايات التالية :

$(1):\lim_{x\to 0}\tan\left(\frac{\sin\pi x}{3x}\right)$ و $(2):\lim_{x\to-1}\sqrt{\frac{-5x^2+2x+7}{x^3+1}}$

$(3):\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi x^2-2x+3}{3x^2+2}\right)$ و $(4):\lim_{x\to-2}\sin\left(\frac{\pi\left(x^2-4\right)}{x^3+8}\right)$

و $(5):\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi x}{2\left(1-\sqrt{1+x}\right)}\right)$.

III- صورة مجال بدالة متصلة:

1)- أنشطة:

- **تمرين09:**

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\begin{cases}1-x^2;x\leq 1\\ x-1;x>1\end{cases}$

أ- بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ ، ثم أنشىء (C_f) في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب- حدد مبيانيا صور كل مجال من المجالات التالية بالدالة f : $I=[1,4]$ و $J=[-3,-1]$ و $K=[-2,1]$ و $L=[2,+\infty[$ و $M=]-\infty,0]$ و $N=]-\infty,4]$.

- **تمرين10:**

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

حدد $g(]1,5])$ و $g(]-\infty,1[)$ و $g]3,5[$ و $g(]-\infty,-1])$.

2)- ملخص:

- **خاصية09:**

صورة مجال من $\mathbb{R}$ بدالة متصلة هو أيضا مجال ، و صورة قطعة بدالة متصلة هي أيضا قطعة .

- **ملحوظة:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=\begin{cases}-1;x\leq 0\\ 1;x>0\end{cases}$

و إذا كان I مجالا ضمن $\mathbb{R}$ بحيث $I\cap]0,+\infty[\neq\varnothing$ و $I\cap]-\infty,0[\neq\varnothing$ فإن :

$f(I)=\{-1,1\}$ ، إذن $f(I)$ ليس مجالا .

و بالتالي فالإتصال شرط لازم لكي تكون صورة مجال مجالا (الدالة f متقطعة في 0) .

- **خاصية10:**

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ ($a<b$) ، فإن : $f([a,b])=[m,M]$

حيث : $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ و $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ ، و f تطبيق شمولي من $[a,b]$ نحو $[m,M]$ بمعنى أن : $\forall y\in[m,M]\quad\exists x\in[a,b]\quad/\quad y=f(x)$.

- **ملحوظة:**

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ فإن :

$f([a,b])=[f(a),f(b)]$ إذا كانت f تزايدية قطعا على $[a,b]$

و $f([a,b])=[f(b),f(a)]$ إذا كانت f تناقصية قطعا على $[a,b]$.

3)- مبرهنة القيم الوسيطية:

- **مبرهنة01:**

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ فلكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a,b]$.

و بصفة خاصة :

- **خاصية11:**

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[a,b]$ فالمعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$ لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

- **ملحوظة:**

يمكن تطبيق الخاصية السابقة على مجال مفتوح و غير محدود باستعمال نهايتي الدالة f

- **مثلا:**

إذا كانت f متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty,a[$ فلكل k من $\left]\lim\limits_{x\to a^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty,a[$.

- **خاصية12:**

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a,b]$.

- **مثال:**

لنبين أن المعادلة : $(E):x^5+x^3+3x-4=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]0,1[$

نضع : $f(x)=x^5+x^3+3x-4$

لدينا : $f(0)=-4$ و $f(1)=1$ ، إذن : $f(0)f(1)<0$

و f دالة حدودية إذن فهي متصلة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[0,1]$

و منه فالمعادلة $f(x)=0$ أي (E) تقبل حلا على الأقل في المجال $]0,1[$.

- **خاصية13:**

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

- **تمرين11:**

بين أن المعادلة $(E): x^3+2x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$.

IV- الدوال العكسية لدوال متصلة و رتيبة قطعا على مجال:

- **مبرهنة02:**

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإن f تقابل من I نحو المجال $J=f(I)$

و الدالة : $f^{-1}:\begin{vmatrix} J\to I \\ x\mapsto y\,/\,f(y)=x \end{vmatrix}$ متصلة على J و لها نفس منحى تغيرات f

و $(C_{f^{-1}})$ هو مماثل (C_f) بالنسبة للمنصف الأول في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- **ملحوظة:**

الجدول التالي يلخص طبيعة المجال $J=f(I)$ تبعا لطبيعة المجال I و رتابة الدالة f :

المجال I	المجال $J=f(I)$: f تزايدية قطعا على I	المجال $J=f(I)$: f تناقصية قطعا على I
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(a)\right]$
$]-\infty,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$

- **مثال:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

و ليكن g قصور f على المجال $I=]-\infty,-2[$ و h قصور f على المجال $K=]-1,0[$.

أ- بين أن g تزايدية قطعا على I ، ثم إستنتج أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب- بين أن h تناقصية قطعا على K ، ثم إستنتج أن h تقابل من K نحو مجال L يتم تحديده .

ج- حدد التقابلين العكسيين g^{-1} و h^{-1} للتقابلين g و h على التوالي .

1)- دالة قوس الظل:

الدالة $f: x\mapsto \tan x$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إذن فهي تقابل من I نحو المجال $J=f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ فإن : $J=\mathbb{R}$

و باالتالي فالدالة $f: x\mapsto \tan x$ تقابل من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$ ، إذن فهي تقبل تقابلا عكسيا f^{-1} من $\mathbb{R}$ نحو $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ يحقق :

$$\forall x\in\mathbb{R} \text{ و } \forall y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\;:\; f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow \tan y=x$$

- **مبرهنة و تعريف:**

الدالة $f: x\mapsto \tan x$ تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$ ، تقابله العكسي يسمى دالة قوس الظل و يرمز لها بالرمز arctan ، إذن : $\arctan:\begin{vmatrix} \mathbb{R}\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x\mapsto y\,/\,\tan y=x \end{vmatrix}$

و بالتالي فإن : $\forall x\in\mathbb{R} \text{ و } \forall y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\;:\; y=\arctan x \Leftrightarrow \tan y=x$

- **خاصية14:**

الدالة $\arctan$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ و هي دالة فردية .

و لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}:\tan(\arctan x)=x$ و $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[:\arctan(\tan x)=x$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \begin{cases}\arctan x=\arctan y\Leftrightarrow x=y\\ \arctan x<\arctan y\Leftrightarrow x<y\end{cases}$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1$.

- **تمرين12:** بين أن :

$\arctan\left(\frac{5}{2}\right)+\arctan\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{3\pi}{4}$ و $\arctan 2+\arctan 5+\arctan 8=\frac{5\pi}{4}$

- **تمرين13:**

أ- أثبت أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

و $2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

ب- أثبت أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا :

$\arctan x+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=sg(x)\frac{\pi}{2}$ ، حيث : $sg(x)=\begin{cases}1;x>0\\-1;x<0\end{cases}$

ج- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$\cos(3\arctan x)=\frac{1-3x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ و $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}$

- **تمرين14:**

أ- حدد مجموعتي تعريف الدالتين العدديتين f و g بحيث :

$f(x)=\tan(2\arctan x)$ و $g(x)=\tan(3\arctan x)$.

ثم بين أن : $\forall x\in D_f: f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ و $\forall x\in D_g: g(x)=\frac{x(3-x^2)}{1-3x^2}$.

ب- حدد النهايات التالية :

$(1):\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x^2+2x}$ و $(2):\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan(x^2-3x)}{x^3}$ و $(3):\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+\sqrt{3}x^2}\right)$

و $(4):\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^3\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2)- دالة قوس الجيب:

الدالة $f: x\mapsto\sin x$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ، إذن فهي تقابل من I نحو المجال $J=f\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]$.

- **مبرهنة و تعريف:**

الدالة $f: x\mapsto\sin x$ تقابل من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ نحو المجال $[-1,1]$ تقابلها العكسي f^{-1} يسمى دالة قوس الجيب و يرمز له بالرمز $\arcsin$.

إذن : $\arcsin:\begin{vmatrix}[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ x\mapsto y\ /\sin y=x\end{vmatrix}$

و لدينا ، $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \begin{cases}y=\arcsin x\\-1\le x\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin y=x\\-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

- **خاصية15:**

الدالة $\arcsin$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[-1,1]$ و هي دالة فردية .

و هذا جدول لبعض قيمها:

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

• **خاصية16:** لدينا :

$$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]:\arcsin(\sin x)=x \quad \text{و} \quad \forall x\in[-1,1]:\sin(\arcsin x)=x$$

و $\forall (x,y)\in[-1,1]^2 : \begin{cases}\arcsin x=\arcsin y \Leftrightarrow x=y\\ \arcsin x<\arcsin y\Leftrightarrow x<y\end{cases}$.

• **تمرين15:**

أ- بين أن : $\forall x\in[-1,1]:\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ ، ثم إستنتج أن :

$\forall x\in]-1,1[:\tan(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

ب- حل في المجال $[-1,1]$ المعادلة : $(E):\arcsin x=\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)+\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$.

3)- دالة قوس جيب التمام:

الدالة $f:x\mapsto\cos x$ متصلة و تناقصية قطعا على المجال $I=[0,\pi]$ ، إذن فهي تقابل من I نحو المجال $J=f([0,\pi])=[-1,1]$.

• **مبرهنة و تعريف:**

الدالة $f:x\mapsto \cos x$ تقابل من المجال $[0,\pi]$ نحو المجال $[-1,1]$ ، تقابلها العكسي f^{-1} يسمى دالة قوس جيب التمام و يرمز له بالرمز $\arccos$.

إذن : $\arccos:\left|\begin{array}{l}[-1,1]\to[0,\pi]\\ x\mapsto y\ /\ \cos y=x\end{array}\right.$

و لدينا ، $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases}y=\arccos x\\ -1\le x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos y=x\\ 0\le y\le\pi\end{cases}$

• **خاصية17:** الدالة $\arccos$ متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[-1,1]$.

• **ملحوظة:**

لدينا : $\forall x\in[-1,1]:\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ ، إذن منحنى الدالة $\arccos$ متماثل بالنسبة للنقطة $\Omega\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ، و بالتالي فالدالة $\arccos$ ليست زوجية ولا فردية .

• **خاصية18:** لدينا :

$$\forall x\in[0,\pi]:\arccos(\cos x)=x \quad \text{و} \quad \forall x\in[-1,1]:\cos(\arccos x)=x$$

و $\forall (x,y)\in[-1,1]^2 : \begin{cases}\arccos x=\arccos y \Leftrightarrow x=y\\ \arccos x<\arccos y\Leftrightarrow x>y\end{cases}$.

• **تمرين16:**

أ- بين أن : $\forall x\in[-1,1]:\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$ ، ثم إستنتج أن :

$\forall x\in[-1,1]-\{0\}:\tan(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

ب- بين أن : $\forall x\in[-1,1]:\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

4)- دالة الجذر من الرتبة n حيث $n\in\mathbb{N}$ و $n\ge 2$:

لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\ge 2$ ، الدالة : $x\mapsto x^n$ متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها حدودية) قصورها f على $\mathbb{R}_+$ تزايدية قطعا ، إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}_+$ نحو $f(\mathbb{R}_+)$.

و بما أن : $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ فإن : $f(\mathbb{R}_+)=\mathbb{R}_+$

و بالتالي فالدالة f تقابل من $\mathbb{R}_+$ نحو $\mathbb{R}_+$.

• **مبرهنة و تعريف:**

لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\ge 2$ ، الدالة $f:x\mapsto x^n$ تقابل من $\mathbb{R}_+$ نحو $\mathbb{R}_+$ تقابلها العكسي يسمى دالة الجذر من الرتبة n و يرمز له بالرمز $\sqrt[n]{\ }$.

إذن : $\sqrt[n]{\ }:\left|\begin{array}{l}[0,+\infty[\to[0,+\infty[\\ x\mapsto y=\sqrt[n]{x}\ /\ y^n=x\end{array}\right.$ والعدد $\sqrt[n]{x}$ يقرأ جذر x من الرتبة n

بصفة خاصة : $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ و هو الجذر المربع ل x و $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب ل x .

• **خاصيات:**

• الدالة $\sqrt[n]{\ }:x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$ و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.

• لكل (x,y) من $\mathbb{R}_+^2$ لدينا : $\begin{cases}y=\sqrt[n]{x}\Leftrightarrow y^n=x\\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^n=\sqrt[n]{x^n}=x\end{cases}$ و $\begin{cases}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y\\ \sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y\end{cases}$

- **تمرين17:**

أ- حل في المجموعة $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية :

$(1): x^7 = 128$ و $(2): x^4 = 32$ و $(3): x^5 = -32$ و $(4): x^{10} = -5$.

ب- حل و ناقش في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): x^n = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

- **العمليات على الجذور من الرتبة n :**

لكل (x, y) من $\mathbb{R}_+^2$ و لكل (n, p) من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث $n \geq 2$ و $p \geq 2$ لدينا :

$\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$ و $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$ و $\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x.y}$ و $\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$

$\sqrt[n]{x}.\sqrt[p]{x} = \sqrt[np]{x^{n+p}}$ و $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} / y \neq 0$.

- **ملحوظة:** العلاقة الأولى تبقى صحيحة بالنسبة لكل عدد نسبي غير منعدم p .
- **إتصال مركب دالة عددية f و الدالة $\sqrt[n]{\ }$:**
- **خاصية19:**

• إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على مجال مفتوح I فإن الدالة $\sqrt[n]{f} : x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ متصلة أيضا على I .

• إذا كانت f دالة موجبة على مجال I مفتوح و منقط مركزه x_0 (أو محد من محداته)

فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \left(\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \text{ و } L \geq 0 \right)$

و $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

- **تمرين18:**

أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 16}$ ، ثم أدرس إتصالها .

ب- حدد كل نهاية من النهايات التالية :

$(1): \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2 - \sqrt[3]{x + 8}}$ و $(2): \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x + 56} - 4}$ و $(3): \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[4]{1 + x}}{1 - \sqrt[3]{1 + x}}$

$(4): \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{2x}}{x - 8}$ و $(5): \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x + \sqrt[3]{x^2}}}$ و $(6): \lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

$(7): \lim\limits_{x \to -\infty} x + \sqrt[4]{1 + x^4}$ و $(8): \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[12]{x}\, \dfrac{\sqrt[4]{1 + x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{x}}$.

5)- القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:

- **تعريف:**

ليكن x عدد حقيقيا موجب قطعا و $r = \dfrac{m}{n}$ عدد جذري غير منعدم ($m \in \mathbb{Z}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$)

العدد الحقيقي الموجب قطعا $\sqrt[n]{x^m}$ يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r

و يرمز له ب x^r ، إذن : $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

- **ملحوظة:**

لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ و لكل n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ لدينا : $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x^1} = x^{\frac{1}{n}}$

و بصفة خاصة : $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

- **أمثلة:** بين أن : $8^{\frac{2}{3}} = 4$ و $5^{\frac{7}{6}} = 5\sqrt[6]{5}$ و $27^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{81}$.
- **خاصيات:** لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$ و لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$ لدينا :

$x^{r+r'} = x^r.x^{r'}$ و $\left(x^r\right)^{r'} = x^{r.r'}$ و $(x.y)^r = x^r.y^r$

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$ و $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$ و $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$.

- **تمرين19:**

أ- قارن العددين $a = \sqrt[4]{2}$ و $b = \sqrt[7]{3}$ ، و بسط العددين A و B حيث :

$A = \dfrac{\sqrt[5]{162}.\sqrt[4]{9}.\sqrt{3}}{\sqrt[6]{128}}$ و $B = \dfrac{27^{\frac{2}{9}} \times 81^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$.

ب- هل الدالتين العدديتين $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ و $g : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ متساويتان ؟ علل جوابك .

abouzakariya@yahoo.fr
Abdellah BEN ELKHATIR - Lycée alfath - khémisset