الأستاذ : علي الشريف قسم : الثانية باك علوم .رياضية	❶ ملخص الحسابيات في Z ❶	دروس الدعم و التقوية ما دة الرياضيات

I- القسمة الإقليدية Z :

$\forall(a,b)\in Z^2\ \exists!(q,r)\in Z^*\times IN/\ a=bq+r$

بحيث $0\le r\langle b$.

① عندما نحدد الزوج (q,r) نقول أننا أجرينا أجرينا القسمة الإقليدية ل a على b .

② a يسمى المقسوم و b المقسوم عليه و q الخارج و r الباقي .

II- قابلية القسمة في Z :

① ليكن a و b في Z.

a/b (b يقسم a) $\Leftrightarrow \exists k\in Z/\ b=ka$.

② $\forall a\in Z \quad : \quad a/a$

③ $\forall(a,b)\in Z^2\ \forall n\in IN^*:\ a^n/b\Rightarrow a/b$

④ $\forall(a,b)\in Z^2: a|b$ و $b|a \Leftrightarrow |a|=|b|$

⑤ $\forall(a,b,c)\in Z^3$

d/a و $d|b \Rightarrow \forall(\alpha,\beta)\in Z^2: d|\alpha a+\beta b$

III- الموافقة بترديد:

① $a\equiv b[n]\Leftrightarrow a-b=kn\ (k\in Z)\Leftrightarrow n|a-b$

② $a\equiv b[n]\Leftrightarrow ac\equiv bc\ [n]$

③ $a\equiv b[n]\Leftrightarrow a+c\equiv b+c\ [n]$

④ $\begin{cases}a\equiv b[n]\\ c\equiv d\ [n]\end{cases}\Leftrightarrow ac\equiv bd[n]$

⑤ $\begin{cases}a\equiv b[n]\\ c\equiv d\ [n]\end{cases}\Leftrightarrow a+c\equiv b+d\ [n]$

IV- القاسم المشترك الأكبر:

ليكن a و b و d في Z .

① d قاسم مشترك ل a و b يعني أن : $d|a$ و $d|b$.

② أكبر قاسم مشترك موجب للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر ل a و b و يرمز له ب :

$a\wedge b$ أو $pgdc(a,b)$ أو $\Delta(a;b)$

③ $d=a\wedge b\Rightarrow d|a$ و $d|b$

④ $\begin{cases}d'|a\\ d'|b\end{cases}\Rightarrow d'|a\wedge b$

⑤ a و b أوليان فيما بينهما $\Leftrightarrow a\wedge b=1$

⑥ $d=a\wedge b\Leftrightarrow\begin{cases}\exists(a',b')\in Z^2/\ a'\wedge b'=1\\ a=d.a' \text{ و } b=d.b'\end{cases}$

⑦ $d=a\wedge b\Rightarrow\exists(u,v)\in Z^2/\ d=ua+vb$

⑧ **(bezout)** $a\wedge b=1\Leftrightarrow ua+vb=1$

⑨ $\begin{cases}a|c \text{ و } b|c\\ a\wedge b=1\end{cases}\Rightarrow ab|c$

⑩ **(Gauss)** $\forall(a,b,c)\in Z^3:\begin{cases}d/ab\\ d\wedge a=1\end{cases}\Rightarrow d/b$

①① $\forall(a;b;c)\in Z\ \begin{cases}a\wedge b=1\\ a\wedge c=1\end{cases}\Leftrightarrow a\wedge bc=1$

①② $\forall(n,m)\in IN^{*2}: a\wedge b=1\Leftrightarrow a^n\wedge b^n=1$

①③ $[a=bq+r/0\le r\le b]\Rightarrow a\wedge b=b\wedge r$

V- المضاعف المشترك الأكبر:

ليكن a و b و m من Z .

① m مضاعف مشترك ل a و b $\Leftrightarrow a/m$ و b/m

② أصغر مضاعف مشترك موجب للعددين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر ل a و b و يرمز له ب :

$a\vee b$ أو $ppcm(a;b)$

③ $m=a\vee b\ \Rightarrow\ a/m$ و b/m

④ $\forall(a,b,c)\in Z^3:\begin{cases}a|c\\ b|c\end{cases}\Rightarrow(a\vee b)|c$

⑤ $\forall(a,b,c)\in Z^2:(a\vee b)(a\wedge b)=|a.b|$

VI- الأعداد الأولية:

① ليكن a و d في Z . نقول إن d قاسم فعلي ل a إذا كان d يقسم a و يخالف الأعداد : a ، -a ، 1 ، -1

② نقول أن عددا صحيحا نسبيا a أولي إذا كان مخالف ل 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية .

☹ **ملحوظة :**

- الأ عداد : 0، -1 ، 1 ليست أولية .
- مجموعة الأعداد الأولية لا منتهية .

ليكن p عدد أولي .

③ $p|a^n\Rightarrow p|a$

④ $p|ab\ \Rightarrow\ p|a$ أو $p|b$

⑤ $p|a_1\times a_2.....\times a_n\Rightarrow\exists_i\in\{1,....,n\}:p|a_i$

⑥ $p\wedge a=p\ \Rightarrow\ p\mid a$

⑦ $p\neg|\ a\ \Rightarrow\ p\wedge a=1$

VII- خوارزمية إقليدس:

ليكن a و b في IN بحيث : $a\rangle b$.

ننجز القسمة ل a على b :

$a=bq_0+r_0$ و $0\le r_0\le b$

*إذا كان : $r_0=0$

فإن : $b|a$ و بالتالي : $a\wedge b=b$.

* إذ اكان : $0\langle r_0\langle b$

ننجز القسمة الإقليدية ل b على r_0 .

$b=r_0q_1+r_1$ و $0\le r_1\langle r_0\langle b$.

* إذا كان : $r_1=0$

cherifalix@hotmail.com

فإن : $r_0 | b$ و بالتالي : $a \wedge b = b \wedge r_0 = r_0$.

* إذا كان : $r_1 \neq 0$

ننجز القسمة الإقليدية ل r_0 على r_1 .

$r_0 = r_1 q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 \leq r_1$.

* بعد إعادة نفس الطريقة عدة مرات سوف نحصل على باق منعدم و القاسم المشترك ل و أخر باقي غير منعدم .

VIII - تفكيك عدد صحيح نسبي غير منعدم إلى جداء عوامل أولية :

① كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم مخالف ل1 و 1- يمكن أن يكتب بكيفية وحيدة على الشكل :

$$n = \varepsilon \times p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots\ldots \times p_r^{\alpha_r} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

حيث : p_1 و p_2 و ..... و p_r أعداد أولية موجبة و مختلفة مثنى ، مثنى .

α_1 و α_2 و ..... و α_r أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة .

② إذا كان $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ و $b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$

(p_i أعداد مختلفة مثنى مثنى.

و $\alpha_i ; \beta_i \in IN$ و $1 \leq i ; j \leq n$ فإن:

$$a \wedge b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\inf(\alpha_i ; \beta_i)} \quad \text{و} \quad a \vee b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\sup(\alpha_i ; \beta_i)}$$

IX - المجموعة Z/Nz:

① $\forall (a ; b) \in Z^2 : a \equiv b[n] \Leftrightarrow a - b = k.n$

العلاقة "≡" علاقة تكافؤ .

② صنف تكافؤ x $(x \in Z)$:

$\bar{x} = \{y \in Z / y \equiv x [n]\}$ أو

$\bar{x} = \{x + k.n / k \in Z\}$

③ مجموعة أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة "≡" تكتب على شكل Z/nZ حيث : $Z/nZ = \{\bar{0} ; \bar{1} ; \ldots ; \overline{(n-1)}\}$

④ $\forall (\bar{x} ; \bar{y}) \in Z/nZ \times Z/nZ$:

$\bar{x} \bar{+} \bar{y} = \overline{x + y}$; $\bar{x} \bar{\times} \bar{y} = \overline{x \times y}$

⑤ $(Z/nZ ; \bar{+})$ زمرة تبادلية .

⑥ $(Z/nZ ; \bar{+} ; \bar{\times})$ حلقة تبادلية وواحدية وتكون جسم إذاكان n أولي .

⑦ $\bar{a}$ قابل للقلب في Z/nZ $\Leftrightarrow$ $a \wedge n = 1$

(قابل للقلب يعني: $\exists \bar{x} \in Z/nZ \ / \ \bar{x} \times \bar{a} = \bar{a} \times \bar{x} = \bar{1}$)

X – نظمات العد:

① ليكن x عدد صحيح طبيعي بحيث $x \geq 2$:

كل عدد صحيح طبيعي b يمكن أن يكتب على شكل :

$$b = a_n . x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + \ldots + a_1 . x + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ و $\forall i \in [0 ; n] : a_i \in [0 ; n-1]$

و نكتب بصيغة مختصرة : $b = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{(n)}$

نقول أن $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{(n)}$ هو التمثيل المختصر للعدد b في نظمة العد ذات الأساس x .

② إذا كان و من ممثلين في نظمة العد ب :

$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{(b)}$ و $y = \overline{c_m c_{m-1} \ldots c_1 c_0}_{(b)}$

و كان: $m \rangle n$ فإن : $y \rangle x$.

③ إذا كان :

$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{(b)}$ و $y = \overline{c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0}_{(b)}$

و $c_n = a_n$ ، $c_{n-1} = a_{n-1}$ ، $c_{i+1} = a_{i+1}$

و $c_i \neq a_i$ فإن ترتيب x و y هو نفس ترتيب a_i و c_i

Baltasar Graci 1601-56 Spanish
cherifalix@hotmail.com