الثانية باكالوريا علوم رياضية

سلسلة الحسابيات في Z

الأستاذ : علي الشريف

التمرين رقم 1 :

1) بين أنه لكل n من $IN-\{0;1\}$: $40^n.n!$ يقسم $(5n)!$.

2) بين أنه لكل n من IN : $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ يقبل القسمة على 9.

3) بين أنه لكل n من IN : $n(n+1)(n+2)(n+3)$ يقبل القسمة على 24 .

4) بين أنه لكل n من IN : $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ يقبل القسمة على 120

5) حل في المجموعة Z ما يلي :

أ - $x-1 \mid x+3$, ب - $x+2 \mid x^2+2$, ج - $10 \mid n^2+(n+1)^2+(n+3)^2$.

6) حدد بواقي قسمة 2^n على 9 ثم بين أنه لكل n من IN : $9 \mid 2^{2n}\left(2^{2n+1}-1\right)-1$

7) ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين بحيث $n\ge 2$ و $m\ge 1$:

أ - بين أن : $n-1 \mid n^m-1$.

ب - بين أن : $(n-1)^2 \mid n^m-1$ إذا وفقط إذا كان $n-1 \mid m$.

التمرين رقم 2 :

1)لتكن $a;b;n$ من IN أحسب ما يلي :

أ - $(3^{123}-5)\wedge 25$, ب - $(2^{443}+7)\wedge 15$, ج - $(n^2+n)\wedge(2n+1)$

د - $(15n^2+8n+6)\wedge(30n^2+21n+13)$, ه - $(a^2+ab+b^2)\wedge ab$

2) حل في Z^2 النظمات التالية :

أ - $\begin{cases} x\wedge y=18 \\ x\vee y=540 \end{cases}$, ب - $\begin{cases} x+y=2070 \\ x\vee y=9180 \end{cases}$, ج - $\begin{cases} x^2+y^2=5409 \\ x\vee y=360 \end{cases}$

التمرين رقم 3 :

1) حل في المجموعة Z^2 ما يلي :

أ - $5x^2+2xy-3=0$, ب - $y^2+4xy-2=0$, ت- $xy=2x+3y$

ث - $x^2-y^2-x+3y=30$, ج - $x^2-5y^2=3$, ح - $x^3-y^3=2xy+8$

2) حل المعادلة : $28^x=19^y+87^z$ مع $(x;y;z)\in IN^3$.

3) حل في المجموعة Z^2 ما يلي :

أ - $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$, ب - $x^2-y^2-4x-2y=5$, ج - $x^4-2y^2\equiv 3[7]$

التمرين رقم 4 :

ليكن $n\in IN$ بحيث $n\succ 1$. و ليكن $n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times.....\times p_r^{\alpha_r}$ تفكيكه إلى جداء عوامل أولية . ليكن d قاسم ل n.

1 - أكتب d بدلالة $p_1;......;p_r$.

2 - ليكن n و d عددين صحيحين طبيعيين أكبر قطعا من 1 . بحيث d يقسم n.

بين أ ن : d^2 يقسم n^2

التمرين رقم 5 :

ليكن p عدد صحيح طبيعي أولي .

1 - حدد جميع الأعداد الصحيحة النسبية α التي تحقق : $\alpha^2\equiv 0\left[p^2\right]$.

2 - آستنتج جميع الأعداد الصحيحة النسبية x التي تحقق : $x^2+18x+32\equiv 0[49]$

التمرين رقم 6 :

ليكن $n\in IN^*$ نرمز ب p_n للعدد الأولي رقم n مثلا : $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$ ....

1 - ليكن $n\in IN$ بحيث $n\ge 2$. بين أن : $p_n\le(p_1\times p_2\times.....\times p_{n-1})+1$

2 - آستنتج أنه لكل $n\in IN$ بحيث $n\ge 2$: $p_n\le(p_{n-1})^{n-1}+1$

3 - بين أنه لكل $n\in IN^*$: $p_n\le 2^{2^{n-1}}$.

التمرين رقم 7:

لتكن X مجموعة الأعداد الأولية التي تكتب على شكل $4k+3$ مع $k\in IN$.

1 - بين أن X مجموعة غير منتهية .

2 – بين أن جداء عددين من الشكل $4k+1$ هو أيضا من هده الشكل .

3 – نفترض أن X مجموعة منتهية بحيث $X=\{p_1;p_2;......;p_n\}$.

ليكن $a=4p_1p_2....p_n-1$. بين أن بالتناقض أن a يقبل قاسم أولي على الشكل $4k+3$.

4 - آستنتج مماسبق أن X مجموعة غيرمنتهية .

التمرين رقم 8:

I - أوجد في نظمة العد العددين الصحيحين الطبيعيين اللدين يكتبان في نظمة العد دات الأساس 5 على الشكل $\overline{n01n}_{(5)}$ حيث n عدد صحيح طبيعي أولي .

II - 1 - ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $(a+b)\wedge ab = p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي .

أ - بين أ ن p^2/a^2 و آ ستنتج أن : p/a و p/b .

ب - بين أن : $a\wedge b = p$ أو $a\wedge b = p^2$.

2 - نعتبر في N^2 النظمة (S) التالية : $(S):\begin{cases}(a+b)\wedge ab = p^2\\ a\vee b = 231\end{cases}$

أ - بين أن : $a\wedge b = 7$

ب - حل في N^2 النظمة (S) .

التمرين رقم 9 :

نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين A و B الممثلين في نظمة العد دات الأساس 9 بما يلي :

$A=\overline{abcd}_{(9)}$ و $B=\overline{bcda}_{(9)}$ حيث a و b غيرمنعدمين .

ونعتبرفي كل ما يلي أ ن العدد B قابل للقسمة على 7 .

1 – بين أ نه إ دا كان a=7 فإن A قابل للقسمة على 7 .

2 – أ – بين أن العدد 9A-a قابل للقسمة على على 7 .

ب - آستنتج أنه إداكان A قابلا للقسمة على 7 فإن a=7.

3 – أ – حل المعادلة : 7x-4y=1 في Z*Z .

ب – نضع c=0 و d=1 . حدد A كي يكون قابلا للقسمة على 7 .

التمرين رقم 10 :

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين .

1 – بين أن : $a\wedge b=1 \Leftrightarrow (ab)\wedge(a+b)=1$

2 - نعتبرفي IN^2 النظمة التالية : $(S):\begin{cases}x\wedge y=2\\ (x+y)/(x^2+y^2)\end{cases}$

أ - نضع $x=2x'$ و $y=2y'$ بحيث $x'\wedge y'=1$ بين أن : $(x'+y')/4$

ب - حل في IN^2 النظمة (S) .

التمرين رقم 11 :

1 - أ - حل المعادلة : $(p,q)\in Z^2:\ 11p-7q=2$

ب - آستنتج مجموعة حلول المعادلة : $(p,q)\in Z^2 : 7p-11q=2$

ج – حل المعادلة : $(p,q)\in Z^2 : 11p-7q=2[77]$

2 - نعتبرالمعادلة (E) التالية : $(E): x\in Z/77Z\ :\ x^2=1$

أ – بين أن :

x حل للمعادلة (E)

$$\Updownarrow$$

$\left(x\in\{\bar{1},\overline{76}\}\right.$ أو $\exists(p,q)\in Z^2:\begin{cases}x+\bar{1}=\overline{11p}\\ x-\bar{1}=\overline{7q}\end{cases}$ أو $\left.\exists(p,q)\in Z^2:\begin{cases}x+\bar{1}=\overline{7p}\\ x-\bar{1}=\overline{11q}\end{cases}\right)$

ب - حل المعادلة (E) .

التمرين رقم 12 :

الهدف من هده التمرين هو تحديد أس العدد الأولي p عند تفكيك العدد ! n إلى جداء عوامل أولية $n\in IN^*$.

1 - ما هو أس العدد الأولي 2 عند تفكيك العدد ! 6 إلى عوامل أولية ؟

2 – نضع : $n!=1\times 2\times .....\times n$ عوامل هدا الجداء التي تحتوي على p هي :

$p, 2p, ..., n_1 p$. بين أ ن : $n_1=E\left(\frac{n}{p^k}\right)$.

3 - آستنتج أن أ س العدد p عند تفكيك $(n!)$ إلى جداء عوامل أولية هو :

$E\left(\frac{n}{p^1}\right)+E\left(\frac{n}{p^2}\right)+......+E\left(\frac{n}{p^k}\right)$ مع k عدد صحيح طبيعي يتم تحديده .

4- حدد أس العدد الأولي 2 عند تفكيك العدد ! 100 إلى جداء عوامل أولية .