التمرين رقم 1 :

أ كتب الأعداد العقدية التالية على الشكل الجبري .

1) $(1-i)(1+i)$ ، 2) $(2-5i)(3+i)$

3) $(2-i)^2$ ، 4) $(1+i)(1-2i)(1+3i)$

5) $(2-i)^3$ ، 6) $\dfrac{(3+2i)(1+i)}{i-1}$

7) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$ ، 8) $\dfrac{1-2i}{1-i}+\dfrac{2-3i}{1+i}$

التمرين رقم 2 :

نعتبر : $f(z)=\dfrac{1+z+z^2+z^3}{1+z}\;;(z\neq -1)$

1) أ حسب : $f(i)\;;f(i-1)\;;f(2+i)$

2) حل في C المعادلة : $f(z)=0$.

التمرين رقم 3 :

حل في C المعادلة :

1) $(1+2i)z-(i-1)=i.z-3$.

2) $z.(z+i)(1-i-z)=0$.

3) $\dfrac{z-1}{z+3}=i.\dfrac{1+2i.z}{1+2z}$ ، 4) $(1-i).z=(2+i)^3$.

5) $(1+i).z=(1-i)^4$ ، 6) $\left(\dfrac{2-i}{1-2i}\right).z=\dfrac{1+i}{1-3i}$.

7) $\left(\dfrac{1-i}{2+i}\right).z=(2-3i)^2$ ، 8) $2.z-\bar{z}=3-6i$

9) $-i.\bar{z}+(2-3i).z=1$.

10) $4.z^2+8.|z|^2-3=0$.

التمرين رقم 4 :

حل في C المعادلة :

1) $z^2+4=0$ ، 2) $z^2-z+2=0$

3) $2.z^2+\sqrt{2}.z+1=0$

4) $4.z^2-12.z+25=0$.

5) $z^3+2.z^2+2.z+1=0$.

6) $z^3+3.z^2+4.z+4=0$.

التمرين رقم 5 :

نعتبر : $f(z):C\to C$

$z\to z^2+1$

1) أ $Im(f(z))$ و $Re(f(z))$ بدلالة $Re(z)$ و $Im(z)$.

2) حدد الأعداد العقدية z حيث $f(z)$ عدد حقيقي .

التمرين رقم 6 :

نعتبر $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}\;;(z\neq i)$ نضع : $z=x+.iy$.

1) أ حسب الجزء الحقيقي و التخيلي ل $f(z)$ بدلالة x و y

2) حدد مجموعة الأعداد العقدية z حيث $Im(z)=0$.

3) أ كتب z بدلالة $f(z)$ ثم أ جب على السؤال 2) .

التمرين رقم 7 :

1) أ نشئ في المستوى المنسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

النقط : $A(-1+2.i)$, $B\left(\dfrac{1}{1+i}\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}.i\right)$

2) حدد لحق المتجهات : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

التمرين رقم 8 :

نعتبر : $f(z)=\dfrac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}}\;;\;(z\neq 1)$

1) أ حسب الجزء الحقيقي و التخيلي ل $f(z)$ بدلالة z

2) بين أ ن مجموعة النقط $M(z)$ حيث $f(z)$ عدد حقيقي هي مستقيم محروم من نقطة .

3) بين أ ن مجموعة النقط $M(z)$ حيث $f(z)$ تخيلي صرفا أ و منعدم .هي دائرة محرومة من نقطة , محددا معادلتها .

التمرين رقم 9 :

ليكن $z=x+i.y$ عدد عقدي مخالف ل-1 ,

و $f(z)=\dfrac{2.i.z-i}{z+1}$. $(\,x\,;y\in IR)$

1) أ حسب $\overline{f(z)}\;;Re(f(z))\;;Im(f(z))\;;|z|$ بدلالة x و y

2) حدد E_1 مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|f(z)|=1$

3) حدد E_2 مجموعة النقط $M(z)$ حيث $f(z)$ تخيلي ص

4) حدد نقط تقاطع المجموعتين E_1 و E_2 .

التمرين رقم 10:

cherifalix@hotmail.com

حدد مجموعة النقط M(Z) حيث :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\right).Z+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\right).\overline{Z}+1=0$$

التمرين رقم 11 :

حدد عمدة الأعداد العقدية التالية التي معيارها 1 :

1) $z=-1\ ;z=1\ ;z=i$.

2) $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ z=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.i\right)^3$

4) $z=\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

التمرين رقم 12 :

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية :

1) $z=\sqrt{2}\ ;\ z=-5\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;z=-2.i\ ;\ z=2.i$.

2) $z=i-\sqrt{3}\ ;\ z=1-i\ ;z=1+i$.

3) $z=\sqrt{2}.\left(\frac{1+i}{1+i.\sqrt{3}}\right)$.

4) $z=\left(\frac{i}{1-i}\right)^4\ ,\ z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}\right)^{12}$

5) $z=1-\cos(\theta)-i.\sin(\theta)$.

6) $z=\sin(\theta)+2.i.\sin^2(\frac{\theta}{2})$.

7) $z=\cos(\theta)+i.(1+\sin(\theta))\ ;\ \theta\in[0;2\pi[$.

التمرين رقم 13 :

أكتب على الشكل الأسي الأعداد العقدية التالية :

1) $2-2.i\ ;1-i.\sqrt{3}\ ;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.i$.

2) $2.\sqrt{3}.(i-\sqrt{3})\ ;\ 5.(1+i)\ ;\ \sqrt{3}-i$.

3) $(1+i.\sqrt{3})^6\ ;(\sqrt{3}-i)^2\ ;(1+i)^3$.

التمرين رقم 14 :

أخطط مايلي :

1) $A(x)=\cos^3(x)\ ,\ B(x)=\sin^3(x)$.

2) $A(x)=\sin^4(x)-3.\sin^2(x).\cos^2(x)$.

3) $A(x)=\cos^3(x).\sin^3(x)\ ,\ B(x)=\sin^4(x)$

4) $A(x)=4.\cos^3(x)-3.\cos(x)$.

5) $B(x)=3.\sin(x)-4.\sin^3(x)$.

التمرين رقم 15 :

1) أ – حدد الجدرين المربعين للعدد 3-4.i.

ب - حدد في المجموعة C حلي المعادلة :

$$Z^2-2.(3+i).Z+5+10.i=0$$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.
نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما 1+2.i و 5 .
بين أن المثلث OAB قائم الزاوية .

3) ليكن θ عمدة للعدد 1+2.i . أ كتب العدد $(1+2.i)^3$ على الشكل الجبري .ثم أستنتج $\cos(3\theta)$.

التمرين رقم 16:

I) نعتبر (E) المعادلة التالية :

$$(E):z^3-4.(1-i).z^2+16.(1-i).z+64.i=0$$

1) تحقق من أن العدد -4.i حل للمعادلة (E) .

2) حل المعادلة (E) .

3) نعتبر العدد بحيث :

$$(k\in\mathbb{Z}):z_k=\left(\frac{1}{4}+i.\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i.\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

أ تبث أن : $z_k=\frac{i}{2^{k-1}}.\sin(\frac{k.\pi}{3})$

ثم أستنتج أن : $z_{2001}=0$

II) المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$
لتكن A صورة العدد z_A و النقطة B صورة العدد z_B
بحيث $z_A=2+2.i.\sqrt{3}$ و $z_B=2-2.i.\sqrt{3}$.

1) أ نشئ النقطة C صورة العدد بحيث :
$z_C=\frac{3}{2}.z_A+z_B$.

2) حدد عمدة $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ و أستنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين رقم 17:

نعتبر العدد العقدي a حيث :

$$a = (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$$

1) أ - أحسب a^2

ب - حدد معيار و عمدة a^2 .

ج - آستنتج معيار و عمدة العدد العقدي a .

2) ليكن u العدد العقدي حيث : $u = \dfrac{a}{2+2.i}$

بين أن : $u = \cos(\dfrac{\pi}{6})+i.\sin(\dfrac{\pi}{6})$

3) نعتبر في C المعادلة :

$$(E): Z^2 - i.(3.u^3+4.u^4).Z - 12.u^7 = 0$$

(Z هو المجهول)

أ – أوجد بدلالة u , حلي المعادلة (E) .

ب - أ كتب على الشكل المثلثي و على الشكل الجبري كلا من حلي المعادلة (E) .

التمرين رقم 18 :

لتكن E مجموعة الأعداد العقدية التي تخالف 1- و , و f تطبيق من E نحو C بحيث : $f(z) = \dfrac{i.z-1}{(z+1)^2}$

I) نعتبر في E المعادلة : $(1): f(z) = z$

1) بين أ ن المعادلة (1) تكافئ المعادلة :

$$z^3 + 2z^2 + (1\text{-}i).z + 1 = 0 \qquad (2)$$

2) بين أ ن المعادلة (2) تقبل حلا على شكل a.i بحيث a عدد حقيقي يجب تحديده .

3) حل في E المعادلة (1) .

II) في هذا الجزء نفترض أ ن : $|z| = 1$

و نضع : $f(z) = Z$

1) بين أ ن : $\overline{Z} = i.z.Z$.

2) آستنتج أ نه إ ذا كان Z عددا عقديا حقيقيا فإ نه منعدم .

التمرين رقم 19 :

نعتبر في C المعادلة (E) التالية :

$$(E): \left(\frac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2 = 2.i\left|\frac{Z}{Z+3.i}\right|$$

1) بين أ ن Z يكون حلا للمعادلة(E) إ ذا و فقط إ ذا كان

$$\left(\frac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2 = i \quad \text{و} \quad |Z+3.i| = 2.|Z|$$

(لا حظ أ ن: $\overline{Z-i} = \overline{Z}+i$)

2) لتكن (ζ) مجموعة النقط M من المستوى العقدي ذات اللحق Z بحيث : $|Z+3.i| = 2.|Z|$

بين أ ن (ζ) دائرة مطلوب تحديد مركزها و شعاعها .

3) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى العقدي ذات اللحق Z بحيث : $\left(\dfrac{Z-i}{\overline{Z}+i}\right)^2 = i$

بين أ ن : (Γ) هي آ تحاد مستقيمين بآستثناء نقطة مطلوب تحديدها .

4) آستنتج عدد حلول المعادلة (E).

التمرين رقم 20:cherifalix@hotmail.com

نعتبر في المجموعة C المعادلة التالية :

$$(E): z^2 - (1+\sqrt{3}).z + \frac{(2+\sqrt{3})-i}{2} = 0$$

1) أ – حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي 2.i .

ب - حل المعادلة (E)

(نرمز للحلين z_1 و z_2 بحيث $Im(z_1) < 0$)

2) أ – تحقق من أ ن : $z_2 = 1+\overline{z_1}$

ب – أ كتب z_1 على الشكل المثلثي .

ج - بين أ ن :

$$z_2 = \left(2\cos(\frac{\pi}{12})\right)\left(\cos(\frac{\pi}{12})+i.\sin(\frac{\pi}{12})\right)$$

3) المستوى منسوب إ لى م.م.م.م. $(O;\vec{u};\vec{v})$

لتكن A و B و C النقط التي أ لحاقها هي التوالي

$$a = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i \quad \text{و} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\text{و} \quad c = \frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.i$$

أ – بين أ ن : $AB = AC = \sqrt{2}$

ب- أ عط قياسا للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

ج – آستنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين رقم 21:

المستوى منسوب إلى م.م.م.م $(O;\vec{u};\vec{v})$

لكل z من $C-\{-1;1\}$ نضع : $g(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$

1) حدد على الشكل الجبري حلي المعادلة : $g(z) = i$

2) نضع : $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$ و $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$.

نعتبر في المستوى النقط : M_1 وM_2 و N . التي أ لحاقها على التوالي هي z_1 وz_2 و $\sqrt{3}-\dfrac{i}{2}$.

أ- بين أن النقط M_1 و M_2 و N مستقيمية

ب – أ كتب كلا من العدد ين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ج- أ حسب $z_1^{60} + z_2^{60}$.

3) أ – بين أ ن لكل z من $C - \{-1;1\}$.

$g(z) \Leftrightarrow (z+\bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$ تخيلي صرف .

ب- حدد في المستوى المجموعة ج للنقط $M(z)$ بحيث $g(z)$ عددا عقديا تخيليا صرفا .

✍ التمرين 22:

نعتبر في المجموعة C الحدودية التالية :

$$P(z) = z^3 - 2(2+3.i)z^2 - 4.(1-5.i)z + 16.(1-i)$$

1) بين أ ن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا حقيقيا α .

2) أوجد الأعداد العقدية a و b و c بحيث يكون :

$$P(z) = (z-\alpha).(a.z^2 + b.z + c)$$

3) حل في C المعادلة : $P(z) = 0$

✍ التمرين 23:

نعتبر في المجموعة C الحدودية التالية :

$$P(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7$$

1) تحقق من أ ن i حل للمعادلة : $P(z) = 0$.

2) بين أ نه إ ذا كان z_0 حل للمعادلة $P(z) = 0$ فإ ن $\overline{z_0}$ كذلك حل للمعادلة .

3) حدد جميع حلول المعادلة : $P(z) = 0$.

✍ التمرين 24:

نعتبر في المجموعة C الحدودية التالية :

$$(\omega \in C)\ (E): z^2 - (2+i.\omega)z + i.\omega - \omega + 2 = 0$$

1) حدد بدلالة ω حلي المعادلة (E) .

2) حدد ω بحيث يكون للمعادلة (E) حل مزدوج .

3) حدد ω بحيث يكون الجذرين مترافقين .

✍ التمرين 25:

نعتبر في المجموعة C الحدودية التالية :

$$P(z) = 4.z^3 + 2.(i-4).z^2 + 3.(3-2.i).z - 9 + \frac{9}{2}.i$$

1) بين أ ن المعادلة : $P(z) = 0$ تقبل حلا حقيقيا α يتم تحديده .

2) أ - حدد العددين العقديين a و b بحيث :

$$P(z) = (z-\alpha).(4.z^2 + a.z + b)$$

ب- حل في C المعادلة : $P(z) = 0$

3) نضع : α و z' و z'' حلول المعادلة (1) .

و لتكن $A(\alpha)$ و $M(z')$ و $M'(z'')$ صورها في المستوى العقدي .

بين أ ن المثلث AMM' قائم الزاوية في النقطة A .

✍ التمرين 26:

نعتبر في المجموعة C المعادلة التالية :

$$(E): 2.z^2 - (3+i).z + 2 = 0$$

1) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة .

2) أ كتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ثم آ ستنتج قيمة : $z_1^4 + z_2^4$

✍ التمرين 27:

نعتبر في المجموعة C المعادلة التالية :

$$(E): z^3 + (3 - i.\sqrt{3})z^2 + 2.(1 - i.\sqrt{3})z - i\sqrt{3} = 0$$

1) تحقق من أ ن 1- حل للمعادلة (E) .

2) حدد الحلو ل الأخرى لهذه المعادلة .

3) أ عط الكتابة المثلثية لهذه الحلول .

4) لتكن M_1 و M_2 و M_3 صور هذه الحلول في المستوى العقدي .

بين أ ن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الأضلاع .

✍ التمرين 28:

نعتبر العدد العقدي : $z = 2\cos^2(\theta) + i.\sin(2\theta)$

حيث : $\left(\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$

1) حدد معيار و عمدة z .

2) ا عط الكتابة الأسية ل z .

✍ التمرين 29:

نعتبر العدد العقدي : $z = -\frac{\sqrt{2}}{16}(1+i)$

1) حدد معيار و عمدة z .

2) آستنتج الجذور المكعبة ل z .

cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

التمرين 30:

1) أ كتب على الشكل المثلثي الاعداد العقدية التالية :

$$z_1 = 1 - i.\sqrt{3} \ , \ z_2 = -3 + 3.i \ , \ z_3 = \frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) أ حسب : $z_1^{\ 6}$ و $z_2^{\ 4}$ و $z_3^{\ 12}$.

التمرين 31:

ليكن :

$z_1 = 4.\sqrt{2}(1-i)$ و $z_2 = \frac{1}{2}.(1+i\sqrt{3})$ و $z = \frac{z_1}{z_2}$

1) أ كتب z_1 و z_2 و z على الشكلين المثلثي و الجبري

2) آ ستنتج قيمتي : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

التمرين 32:

أ كتب العددين $1+i.\sqrt{3}$ و $1-i.\sqrt{3}$ على الشكل المثلثي

ثم أ حسب : $\left(1+i.\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i.\sqrt{3}\right)^n$

التمرين 33 :

نعتبر في المجموعة C المعادلة :

$$(E_n) : z^n = (i.z - 2i)^n$$

حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

1) حل في C المعادلة (E_2) .

2) أ – أ كتب كلا من العددين $1+i.\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}-i$ على الشكل المثلثي .

ب – آ ستنتج أ ن العدد $1+i.\sqrt{3}$ هو حل للمعادلة (E_{12}) .

3) أ – في المستوى العقدي , حدد مجموعة النقط M التي لحقهاz يحقق : $|z| = |i.z - 2i|$

ب- آ ستنتج أ ن جميع حلول المعادلة (E_n) تكتب على الشكل : $1 + a.i$ حيث $a \in IR$.

التمرين 34 :

ليكن m عدد عقدي غير منعدم , نعتبر في C المعادلة :

$$(E) : z^2 - (3m-2)z + 2m^2 - 4m.i = 0$$

1) حل المعادلة (E) .

2) نعتبر في هذا السؤال $m = 1+i$ و ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث $|z_1| \langle |z_2|$.

أ – أ كتب على الشكل المثلثي كلا من z_1 و z_2 .

ب – تحقق من أ ن $(-z_1)$ هو جذرمكعب للعدد z_2 , ثم آ ستنتج على الشكل الجبري . الجذرين المكعبين الآخرين للعدد z_2 .

3) المستوى منسوب إ لى م.م.م م. لتكن A و B و C النقط التي أ لحاقها على التوالي : i ; $2.m$; $m - 2.i$ و نفترض أ ن m ليس تخيلي صرفا .

أ – بين أ ن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب- خارج المثلث ABC ننشئ النقطة D بحيث يكون المثلثBCD متساوي الساقين و قائم الزاوية في D .

ليكن d لحق النقطة D .

بين أ ن :

$$d = \frac{3.m - i.m + 2 - 2.i}{2}$$

أ و

$$d = \frac{3.m + i.m - 2 - 2.i}{2}$$

ج – حدد m لكي يكون الرباعي ABCD مربعا .

التمرين 35 :

ليكن $Z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i.\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

نضع $\alpha = Z_0 + Z_0^4$ و $\beta = Z_0^2 + Z_0^3$

1) أ حسب Z_0^5 .

2) بين أ ن α و β هما حلي المعادلة :

$$(E) : Z^2 + Z - 1 = 0$$

3) حدد α بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

4) حل المعادلة (E) ثم آ ستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

التمرين 36:

المستوى العقدي P منسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) نعتبر التطبيق φ المعرف على المجموعة *C بما يلي

$$(\forall z \in C^*) \ \varphi(z) = \frac{1}{2}.\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

أ – حل فيC المعادلة : $\varphi(z) = i$

cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

ب – نضع $z = r.e^{i.\theta}$ حيث $r \rangle 0$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ عبر بدلالة r و θ عن الجزء الحقيقي و عن الجزء التخيلي للعدد العقدي $\varphi(z)$.

2) نعتبر التطبيق f من P* نحو P الذي يربط كل نقطة $M(z)$ (مع $z \ne 0$) بالنقطة $M(\varphi(z))$.

لتكن (C_r) الدائرة التي مركزها O و شعاعها r.

أ) بين أنه :

$$M(z)\in(C_r) \Leftrightarrow \exists\theta\in[0;2\pi[: z = r.e^{i\theta}$$

ب) بين أن صورة الدائرة (C_r) بالتطبيق f توجد ضمن مخروطي (E_r) يجب تحديد معادلة مختصرة له .

ثم استنتج أن (E_r) هليليج بؤرتاه $F(1)$ و $F'(-1)$

3) لتكن $M(z)$ نقطة من (E_r) و $M'(z')$ نقطة من المستوى P بحيث $z'^2 + z^2 = 1$

أ) بين أن : $OM'^2 = MF.MF'$

(لا حظ أن : $z'^2 = (1-z).(1+z)$)

ب) بين أن :

$$2.\arg(z') \equiv \arg(1-z) + \arg(-1-z) + \pi[2\pi]$$

التمرين 37 :

نعتبر في C المعادلة :

$$(E) : m.z^4 + (m-1).z^2 - i = 0$$

حيث m بارامتر .

1) نفترض أن m عدد حقيقي حل المعادلة (E) .

2) نفترض أن m عدد عقدي معياره ρ و عمدته θ , حل المعادلة (E) .

3) حدد المجموعة (ζ) مجموعة الاعداد (الحقيقية أو العقدية) التي من أجلها جميع حلول المعادلة (E) لها نفس المعيار .

التمرين 38 :

بين أنه : $\forall z\in C :$

$$\begin{cases} Im(z)\ge 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\dfrac{|z|+Ré(z)}{2}} + i.\sqrt{\dfrac{|z|-Ré(z)}{2}}\right)^2 \\ Im(z)\ge 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\dfrac{|z|+Ré(z)}{2}} - i.\sqrt{\dfrac{|z|-Ré(z)}{2}}\right)^2 \end{cases}$$

cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

التمرين 39 :

بين أنه :

$$\forall(z;z')\in C^2 :$$

$$z.\overline{z'} = \left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 - \left|\frac{z-z'}{2}\right|^2 + i.\left|\frac{z+i.z'}{2}\right|^2 - i.\left|\frac{z-i.z'}{2}\right|^2$$

التمرين 40 :

بين أنه :

(1 $\forall(z_1,z_2)\in C^*\times C :$

$$\left(|z_1+z_2| = |z_1-z_2| \Leftrightarrow (\exists\lambda\in IR / z_2 = i.\lambda.z_1)\right)$$

(2 $\forall(z_1,z_2)\in C^2 :$

$$\left(\begin{cases}|z_1| = |z_2| = 1 \\ 1+z_1.z_2 \ne 0\end{cases} \Rightarrow \frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}\in IR\right)$$

التمرين 41 :

حل في C المعادلات التالية :

(1 $z^4 - (5-14.i).z^2 - 2(5.i+12) = 0$

(2 $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \dfrac{z+i}{z-i} + 1 = 0$

(3 $(z+i)^n = (z-i)^n$, $n\in IN, n\ge 2$

(4 $z + \overline{z} + j.(z+1) + 2 = 0$

التمرين 42 :

بين أنه : $\forall z\in C :$

$$\frac{|Ré(z)+Im(z)|}{\sqrt{2}} \le z \le |Ré(z)| + |Im(z)|$$

التمرين 43 :

بين أنه : $\forall n\in IN^*, \forall\theta\in IR$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2.k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{2.k\pi}{n}\right) = 0$$

التمرين 44 :

حدد : $\left\{n\in IN /, (\sqrt{3}+i)^n \in IR\right\}$

التمرين 45 :

حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل حالة :

(1 $\dfrac{z-1-i}{z+1}\in IR$.

ب – نضع $z=r.e^{i.\theta}$ حيث $r>0$ و $0\le\theta\le 2\pi$

عبر بدلالة r و θ عن الجزء الحقيقي و عن الجزء التخيلي للعدد العقدي $\varphi(z)$.

2) نعتبر التطبيق f من *P نحو P الذي يربط كل نقطة $M(z)$ (مع $z\neq 0$) بالنقطة $M(\varphi(z))$.

لتكن (C_r) الدائرة التي مركزها O و شعاعها r.

أ) بين أ نه :

$$M(z)\in(C_r)\Leftrightarrow \exists\theta\in[0;2\pi[:z=r.e^{i\theta}$$

ب) بين أ ن صورة الدائرة (C_r) بالتطبيق f توجد ضمن مخروطي (E_r) يجب تحديد معادلة مختصرة له .

ثم آ ستنتج أ ن (E_r) آ هليليج بؤرتاه $F(1)$ و $F'(-1)$

3) لتكن $M(z)$ نقطة من (E_r) و $M'(z')$ نقطة من المستوى P بحيث $z'^2+z^2=1$

أ) بين أن : $OM'^2=MF.MF'$

(لا حظ أ ن : $z'^2=(1-z).(1+z)$)

ب) بين أ ن :

$$2.\arg(z')\equiv\arg(1-z)+\arg(-1-z)+\pi[2\pi]$$

التمرين 37 :

نعتبر في C المعادلة :

$$(E):m.z^4+(m-1).z^2-i=0$$

حيثm بارامتر .

1) نفترض أ ن m عدد حقيقي حل المعادلة (E) .

2) نفترض أ ن m عدد عقدي معياره ρ و عمدته θ , حل المعادلة (E) .

3) حدد المجموعة (ζ) مجموعة الا عداد (الحقيقية أ و العقدية) التي من أ جلها جميع حلول المعادلة (E) لها نفس المعيار .

التمرين 38 :

بين أ نه : $\forall z\in C:$

$$\begin{cases} Im(z)\geq 0\Rightarrow z=\left(\sqrt{\dfrac{|z|+Ré(z)}{2}}+i.\sqrt{\dfrac{|z|-Ré(z)}{2}}\right)^2 \\ Im(z)\geq 0\Rightarrow z=\left(\sqrt{\dfrac{|z|+Ré(z)}{2}}-i.\sqrt{\dfrac{|z|-Ré(z)}{2}}\right)^2 \end{cases}$$

cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

التمرين 39 :

بين أ نه :

$$\forall(z;z')\in C^2:\quad z.\overline{z'}=\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2-\left|\frac{z-z'}{2}\right|^2+i.\left|\frac{z+i.z'}{2}\right|^2-i.\left|\frac{z-i.z'}{2}\right|^2$$

التمرين 40 :

بين أ نه :

1) $\forall(z_1,z_2)\in C^*\times C:$

$$\left(|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow(\exists\lambda\in IR/z_2=i.\lambda.z_1)\right)$$

2) $\forall(z_1,z_2)\in C^2:$

$$\left(\begin{cases}|z_1|=|z_2|=1\\1+z_1.z_2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}\in IR\right)$$

التمرين 41 :

حل في C المعادلات التالية :

1) $z^4-(5-14.i).z^2-2(5.i+12)=0$

2) $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2+\dfrac{z+i}{z-i}+1=0$

3) $(z+i)^n=(z-i)^n\ ,\ n\in IN,n\geq 2$

4) $z+\overline{z}+j.(z+1)+2=0$

التمرين 42 :

بين أ نه : $\forall z\in C:$

$$\frac{|Ré(z)+Im(z)|}{\sqrt{2}}\leq z\leq|Ré(z)|+|Im(z)|$$

التمرين 43 :

بين أ نه : $\forall n\in IN^*,\forall\theta\in IR$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2.k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{2.k\pi}{n}\right)=0$$

التمرين 44 :

حدد : $\left\{n\in IN\ /,\ \left(\sqrt{3}+i\right)^n\in IR\right\}$

التمرين 45 :

حد د مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل حالة :

1) $\dfrac{z-1-i}{z+1}\in IR$.

2) O مركز تعا مد المثلث المكون من النقط ذا ت اللواحق z, z^2, z^3 .

3) النقط ذا ت اللواحق $1+i, z+i, 1+i.z$ مستقيمية

4) النقط ذا ت اللواحق $j, z, j.z$ مستقيمية .

5) النقط ذا ت اللواحق z, z^2, z^5 مستقيمية .

6) النقط ذا ت اللواحق z, z^2, z^3 تكون مثلث قائم زاوية

7) النقط ذا ت اللواحق $1, z, \frac{1}{z}, 1-z$ متداورة .

8) النقط ذا ت اللواحق $i, z, i.z$ تكون مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في i.

التمرين 46 :

نعتبر النقطة M التي لحقها : $m = a + i.b$ حيث : $(a \in IR \text{ و } b \in IR)$

لتكن المعادلة :

$$z^3 + (2-i).z^2 + (m^2 + 1 - 2.i)z - i.(1+m^2) = 0$$

1) تأكد أن i حلا لهذه المعادلة ثم أ وجد حليها الآخرين .

2) ما هي مجموعة النقط M ليكون للمعادلة على الاقل حلان لهما نفس المعيار . آ رسم هذ ه المجموعة .

التمرين 47 :

ليكن $z = x + i.y$ $(x \in IR \text{ و } y \in IR)$ عددا عقديا

و ليكن : $Z = \frac{2}{3}.z - \frac{1}{3}.\bar{z} - 1$

M هي صورة z في المستوى العقدي :

حدد في كل حالة مجموعة النقط M و آ رسمها :

1) $|Z| = 1$, 2) $Ré(Z^2) = 1$, 3) $Im(Z^2) = 1$

التمرين 48 :

نعتبر العددين العقديين z و Z بحيث :

$$z = 2.\cos^2(\theta) + i\sin^2(\theta) \text{ و } Z = \frac{1}{z^2}$$

حيث : $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

لتكن m و M صورتي z و Z في المستوى العقدي .

1) أ حسب معيار و عمدة z و آ ستنتج معيار و عمدة Z .

برهن أ ن : $Z = \frac{1}{4}.(1 - tg^2(\theta)) - \frac{1}{2}.i.tg(\theta)$

2) أ – برهن على أ ن m تنتمي إ لى المنحنى (ω) الذي معادلته $x^2 + y^2 - 2.x = 0$. ما هي طبيعة آ رسمه .

ب – برهن على أ ن M تنتمي إ لى المنحنى (Ω) الذي معادلته $4.x + 4.y^2 = -1$ ما هي طبيعة آ رسمه .

التمرين 49 :

1) ليكن $u = a + b.i$ عددا عقديا حيث : $(a \in IR \text{ و } b \in IR)$

أ) كيف يجب آ ختيار a و b ليكون $\arg(u) = \frac{\pi}{4}$ ؟

ب) كيف يجب آ ختيار a و b ليكون $|u| = \sqrt{2}$ ؟

2) ليكن m عدد عقدي : نضع $m = \alpha + i.\beta$ حيث : $(\beta \in IR \text{ و } \alpha \in IR)$

لتكن M صورة العدد العقدي .

حل المعادلة في C .

$$(E) \quad z^2 - (2+i.m).z + i.m + 2 - m = 0$$

أ حد الحلين غير مرتبط بالعدد m , أ حسب معياره و عمدته. الحل الآ خر مرتبط بالعدد m , أ حسبه بدلالة و

3) أ – نعتبر قيم البارامتر m بحيث يكون لحلي المعادلة (E) نفس المعيار .

أ وجد في هذه الحالة المجموعة (C) للنقط M , آ رسمها

ب) نعتبر قيم البارامتر m بحيث يكون لحلي المعادلة (E) نفس العمدة , برهن على أ ن مجموعة النقط M هي نصف (Δ) مستقيم آ رسمه .

ج) برهن على أ نه توجد قيمة وحيدة m بحيث يكون للمعادلة (E) حل مزدوج .

أ وجد النتيجة السابقة مباشرة حسابيا .

التمرين 50 :

1)حل المعادلة في C .

$$z^2 - \lambda.(1+2.i).z + 2.i.\lambda^2 = 0$$

λ بارامتر عقدي غير منعدم .

z_1 و z_2 هما حلا المعادلة و M_1 و M_2 هما صورتاهما في المستوى العقدي .

2) أ حسب $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ و آ ستنتج منه أ ن المثلث OM_1M_2 المتغير يبقى قائم الزاوية في O عندما يتغير λ .

3) أ – أ حسب معيار و عمدة العددين z_1 و z_2 بدلالة معيار و عمدة λ.

ب – نفترض أ ن λ يتغير و هو محتفظ بمعيار ثابت $r \rangle 0$ ما هي مجموعتي النقطتين M_1 و M_2 . آ رسم هاتين المجموعتين بأ خذك $r = 2$.

ج – نفترض أ ن λ يتغير و هو محتفظ بعمدة ثابت α

$\alpha \in]-\pi,\pi]$ ما هي مجموعتي النقطتين M_1 و M_2

آ رسم هاتين المجموعتين بأ خذك $\alpha = \frac{\pi}{3}$

التمرين 51 :

1) أ كتب على الشكل المثلثي : $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

2) حل المعادلة : $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

التمرين 52 :

نعتبر التطبيق f في C المعرف بما يلي:

$$f(z) = z^3 + 4.\bar{z}$$

1) نضع: $z = x + i.y$ $(x \in IR$ و $y \in IR)$

النقطة M هي صورة z في المستوى العقدي .

أ – أ كتب f(z) بدلالة x و y على الشكل الجبري .

ب- حدد المجموعة (E) للنقط M بحيث يكون f(z) عددا حقيقيا .

ج – حدد المجموعة (F) للنقط M بحيث يكون f(z) عددا تخيليا صرفا.

ه- آ ستعمل الصيغة الجبرية للعدد f(z) لحل المعادلة :

$$f(z) = 0$$

د – آ رسم صور الحلين في المستوى العقدي و آ رسم المجموعتين (E) و (F) .

2) ليكن التطبيق g من C* إ لى C المعرف بما يلي :

$$g(z) = z^2 + \alpha.\frac{z}{\bar{z}} \quad , \quad \alpha \in IR^{*+}$$

أ – نضع : $z = \sqrt{\alpha}.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))$

برهن على أ ن : $g(z) = 2.\alpha.\cos(2\theta)$

ب- حدد عمدة z ليكون z حلا للمعادلة : $g(z) = 0$

ج- آ ستنتج حلول المعادلة : $g(z) = 0$

التمرين 53 :

نعتبر التطبيق φ من $C - \{-1\}$ إ لى C المعرف بما يلي

$$\varphi(z) = \frac{i.z - 1}{(z+1)^2}$$

I) حل المعادلة : $\varphi(z) = z$

علما أ ن إ حدى حلولهاتخيلي صرفا .

II) نفترض في هذا السؤال أ ن : $|z| = 1$

1) نضع : $\varphi(z) = Z$

ب – آ ستنتج أ نه إ ذا كا ن Z حقيقيا فإ نه منعدما .

2) نضع : $z = \cos(\theta) + i.\sin(\theta)$ $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

أ – تأ كد من أ ن :

$$1 + \sin(\theta) = 2.\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\theta) = 2.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

ب – أ كتب العددين i.z-1 و z+1 على الشكل المثلثي .

ج- آ ستنتج كتابة Z على الشكل المثلثي .

التمرين 54 :

1) حل المعادلة في C : $Z^{12} = 1$

ثم أ كتب حلولها على الشكل المثلثي

2) u عدد عقدي أ حسب : $1 + u + u^2 + ... + u^n$

و آ ستنتج حلول المعادلة: $Z^8 + Z^4 + 1 = 0$

التمرين 55 :

نعتبر اللمعادلة : $z^4 = 1 + i.\sqrt{3}$: $z \in C$

1) حل المعادلة ثم أعط الشكل المثلثي لكل حل من حلولها.

2) أ عط الشكل الجبري لكل جذر من الجذرين المربعين للعدد : $u = i + \sqrt{3}$

3) نضع : $v = \sqrt{\frac{2.\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} + i.\sqrt{\frac{2.\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

أ عط الشكل الجبري للعدد v^2

و آ ستنتج أ ن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4) المستوى P منسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

نعتبر التحويل S من P نحو P الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z = (1 + i.\sqrt{3}).z - \sqrt{3}$

حدد طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من P بحيث :

$$\|\overrightarrow{OM'}\| = \sqrt{3}.\|\overrightarrow{OM}\|$$

التمرين 56 :

نعتبر المعادلة :

$$P(Z) = z^3 + (1 + 3.ie^{i\theta})z^2 + [1 + i.(1 + 3e^{i\theta})]z + (3.i - 3).e^{i\theta}$$

حيث θ عدد حقيقي و $z \in C$.

1) بين أ ن $z_1 = -3.e^{i\theta}$ حل للمعادلة :

أ – برهن على أ ن : $\overline{Z}=i.z.Z$

الأستاذ : علي الشريف الخميسات	تمارين درس الأعداد العقدية ص 10 www.madariss.fr	دروس الدعم و التقوية قسم : الثانية باكالوريا علوم. رياضية

$\alpha\in]-\pi,\pi]$ ما هي مجموعتي النقطتين M_1 و M_2

آ رسم هاتين المجموعتين بأ خذك $\alpha=\frac{\pi}{3}$

✍ التمرين 51 :

1) أ كتب على الشكل المثلثي : $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

2) حل المعادلة : $z^8=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

✍ التمرين 52 :

نعتبر التطبيق f في C المعرف بما يلي:

$$f(z)=z^3+4.\overline{z}$$

1) نضع: $z=x+i.y$ $(x\in IR$ و $y\in IR)$

النقطة M هي صورة z في المستوى العقدي .

أ – أ كتب f(z) بدلالة x و y على الشكل الجبري .

ب- حدد المجموعة (E) للنقط M بحيث يكون f(z) عددا حقيقيا .

ج – حدد المجموعة (F) للنقط M بحيث يكون f(z) عددا تخيليا صرفا.

ه- آ ستعمل الصيغة الجبرية للعدد f(z) لحل المعادلة : $f(z)=0$

د – آ رسم صور الحلين في المستوى العقدي و آ رسم المجموعتين (E) و (F) .

2) ليكن g التطبيق من C* إ لى C المعرف بما يلي :

$$g(z)=z^2+\alpha.\frac{\overline{z}}{z}\quad,\quad \alpha\in IR^{*+}$$

أ – نضع : $z=\sqrt{\alpha}.(\cos(\theta)+i.\sin(\theta))$

برهن على أ ن : $g(z)=2.\alpha.\cos(2\theta)$

ب- حدد معيار z ليكون z حلا للمعادلة : $g(z)=0$

ج- آ ستنتج حلول المعادلة : $g(z)=0$

✍ التمرين 53 :

نعتبر التطبيق φ من $C-\{-1\}$ إ لى C المعرف بما يلي

$$\varphi(z)=\frac{i.z-1}{(z+1)^2}$$

I) حل المعادلة : $\varphi(z)=z$

علما أ ن إ حدى حلولهاتخيلي صرفا .

II) نفترض في هذا السؤال أ ن : $|z|=1$

ب – آ ستنتج أ نه إ ذا كا ن Z حقيقيا فإ نه منعدما .

2) نضع : $z=\cos(\theta)+i.\sin(\theta)$ $\theta\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

أ – تأ كد من أ ن :

$$1+\sin(\theta)=2.\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\theta)=2.\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

ب – أ كتب العددين i.z-1 و z+1 على الشكل المثلثي .

ج- آ ستنتج كتابة Z على الشكل المثلثي .

✍ التمرين 54 :

1) حل المعادلة في C : $Z^{12}=1$

ثم أ كتب حلولها على الشكل المثلثي

2) u عدد عقدي أ حسب : $1+u+u^2+....+u^n$

و آ ستنتج حلول المعادلة: $Z^8+Z^4+1=0$

✍ التمرين 55 :

نعتبر اللمعادلة : $z\in C\ :\ z^4=1+i.\sqrt{3}$

1) حل المعادلة ثم أعط الشكل المثلثي لكل حل من حلولها.

2) أ عط الشكل الجبري لكل جذر من الجذرين المربعين للعدد : $u=i+\sqrt{3}$

3) نضع : $v=\sqrt{\frac{2.\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}+i.\sqrt{\frac{2.\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

أ عط الشكل الجبري للعدد v^2

و آ ستنتج أ ن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4) المستوى P منسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

نعتبر التحويل S من P نحو P الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z=(1+i.\sqrt{3})z-\sqrt{3}$

حدد طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من P بحيث :

$$\|\overrightarrow{OM'}\|=\sqrt{3}.\|\overrightarrow{OM}\|$$

✍ التمرين 56 :

نعتبر المعادلة :

$$P(Z)=z^3+(1+3.ie^{i\theta})z^2+[1+i.(1+3e^{i\theta})]z+(3.i-3).e^{i\theta}$$

حيث θ عدد حقيقي و $z\in C$.

1) نضع : $\varphi(z)=Z$

أ – برهن على أ ن : $\overline{Z}=i.z.Z$

1) بين أ ن $z_1=-3.e^{i\theta}$ حل للمعادلة :

$(E): P(z)=0 \ ; z\in C$

2) أ – حدد العددين العقديين a و b بحيث :

$\forall z\in C: P(z)=(z+3.i.e^{i\theta})(z^2+a.z+b)$

ب – ليكن z_2 و z_3 الحلين الآ خرين للمعادلة (E) .

حدد z_2 و z_3 (z_2 هو الحل التخيلي الصرف)

3) أ – أكتب $z_1 ; z_2 ; z_3$ على الشكل المثلثي .

ب – نضع $\theta=\frac{\pi}{10}$ حدد الشكل الجبري للعدد العقدي α حيث : $\alpha=z_1^5+z_2^5+z_3^5$

التمرين 57 :

المستوى العقدي منسوب إ لى م.م.م $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

نعتبر المعادلة : $(E): z^2-2.z+\frac{1}{\cos^2(\theta)}=0$

حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1) أ – حل المعادلة (E).

ب – ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) حيث :

$Im(z_1)=\tan(\theta)$

أ كتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) لتكن M_1 و M_2 على التوالي صورتي z_1 و z_2 في المستوى العقدي .بين أ ن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين رأ سه O .

3) ليكن $n\in IN^*$.نعتبر المعادلة :

$(E_1): z^{2.n}-2.z^n+\frac{1}{\cos^2(\theta)}=0$

حدد حلول المعادلة (E_1) على الشكل المثلثي .

التمرين 58 :

نعتبر المعادلة :

$(E): z^2+2.\cos(\theta).(1+\cos(\theta)).z+(1+\cos(\theta))^2=0$

حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

1) حل المعادلة (E) ثم أعط الشكل المثلثي لحليها بدلالة θ

2) حدد على الشكل المثلثي بدلالة θ الجذرين المربعين

$a=2.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).(-\cos(\theta)+.i\sin(\theta))$

3) آ ستنتج على الشكل المثلثي بدلالة θ الجذرين المربعين للعدد z_3 و z_4 $\overline{a}$.

4) نضع لكل n من IN :

$S_n=z_1^n+z_2^n+z_3^n+z_4^n$

5) بين أ ن لكل p منIN :

$S_{2.p}=(-1)^p.2^{p+2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2p}.\cos(p\theta)$

و $S_{2.p+1}=0$

التمرين 60 :

المستوى P منسوب إلى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر في C المعادلة :

$(E_\theta): z^2-(1+i\sin 2\theta)z+\frac{1}{2}i\sin 2\theta=0$

حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

1) حل في C المعادلة (E_θ) و أعط الحل المزدوج.

2) لتكن M' و M'' صورتي الحلين z' و z'' و I منتصف $[M'M'']$.

a.ما هي مجموعة النقط I عندما يتغير θ في $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

b.برهن على أن مجموعة النقطتين M' و M'' هي دائرة يجب تحديدها.

c. برهن أنه إذا كان $M'\neq M''$ فإن المستقيم$(M'M'')$ له اتجاه غير مرتبط بقيم θ. d. θ معلوم آستنتج مما سبق طريقة بسيطة لإنشاء I و M' و M'' .

التمرين 61 :

نعتبر f_a التطبيق من $C-\{a\}$ نحو $C-\{a\}$ المعرف بمايلي : $f_a(z)=\frac{az}{z-a}$ حيث $a\in C^*$

1) بين أن :

$f_a(z)\in i\ IR \Leftrightarrow |z|^2 \quad R_e(a)=|a|^2 \quad R_e(z)$

2) ليكن z من $C-\{a\}$ نضع $|z-a|=r$

و $\arg(z-a)\equiv\theta[2\pi]$

z_1 و z_2 للعدد العقدي :

احسب $|f_a(z)-a|$ بدلالة r و $|a|$ و $\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ و arg a .

3) نضع فيما يلي : $a=-1+i$ و نعتبر في المستوى (P) المنسوب إلى م.م.م.م $(O,\vec{u},\vec{v})$ المجموعات التالية :

$$(\sigma)=\{M(z)/|f_a(z)-a|=2\}$$

$$(E)=\{M(z)/f_a(z)\in i\,IR\}$$

$$(D)=\left\{M(z)/\arg(f_a(z)-a)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$$

أ- حدد كلا من (E) و (σ) و بين أن (D) نصف مستقيم طرفه A(a) محروم من النقطة A(a) محددا معادلة ديكارتية له.

ب-ليكن z_θ من $C-\{a\}$ و النقطة B ذات اللحق z_θ بحيث B تنتمي إلى $(D)\cap(\sigma)$

اكتب $f_a(z_\theta)$ على الشكل الجبري ثم اشتنتج z_θ .

ج-أنشيء (σ) و (E) و (D) في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

التمرين 62 :

I) نعتبر المعادلة (E) التالية:

$$(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

بحيث $z\in C$ و α عدد حقيقي من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1)ليكن z_0 حلا للمعادلة (E).

أثبت أن $|1+iz_0|=|1-iz_0|$ و أستنتج أن z_0 عدد حقيقي .

2)أ-أ عط الشكل المثلثي للعدد العقدي: $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

ب- ليكن z عددا حقيقيا .نضع $z=\tan\varphi$ حيث φ عدد حقيقي من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

بين أن المعادلة(E) تكافئ معادلة (E') ذات المجهول φ ثم حل المعادلة(E').

ج- حل المعادلة(E)

II)المستوى العقدي P منسوب إلى م.م م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1) نعتبر التحويل S_U من P نحو P الذي يربط كل نقطة M(z) بالنقطة M'(z') بحيث : $z'=uz$

متعامدتان.

2) ليكن u و u' عددين عقديين بحيث $u=1+ik$ و $u'=1+ik'$ $\left((k,k')\in IR^2\right)$

أ-أعط طريقة هندسية لإ نشاء M'' انطلاقا من النقطين المعلومتين K(u) و K'(u') في الحالة $k\neq k'$.

ب-حدد (Γ) مجموعة النقط M'' في الحالة التي يكون فيها k و k' متساويين ويتغيران في IR. أنشيء(Γ) .

التمرين 63 :

نعتبر النقطتين A(i) و A'(-i) و f التطبيق من $C-\{i\}$ نحو C و المعرف كما يلي: $f(z)=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$

و F تطبيق من $P-\{A\}$ نحو P يربط كل نقطة M(z) بالنقطة M'(z') حيث : $z'=f(z)$

1(a - أثبت أن: $|z'|=|z|$

و $\arg z'\equiv -\arg z+2\arg(z-i)(2\pi)$ إذا كان $z\neq 0$ و $z\neq i$ (نلاحظ أن z-i و $\bar{z}+1$ مترافقان).

b)بين أن إذاكان $|z|=1$ فإن $f(z)=--i$

2(a حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F.

b) ماهي مجموعة النقط M(z) حيث تكون $f(z)\in iIR$ ؟

3)بي $z'+i=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$ و $z'-z=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$.

b - استنتج أن المتجهتين $\vec{AM}$ و $\vec{A'M'}$.

التمرين 64 :

ليكن u عددا عقديا غير منعدم و j العدد العقدي بحيث

$$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نضع $u=[r,\theta]$ و $z_1=uj$ و $z_2=ui$

1)اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

2) نضع $Z=\frac{z_1+z_2}{z_1+z_2}$

أ- حدد معيار و عمدة العدد العقدي

$\bar{j}-i$ نأ خذ : $\left(\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$

u) عدد عقدي بحيث $R_e(u)=1$ ($R_e(u)$: الجزء الحقيقي للعدد u.

حدد طبيعة S_U وبين أن المتجهتين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{MM'}$

ب- استنتج الشكل المثلثي للعدد Z بدلالة r و θ

3)أ- حدد قيم θ التي يكون من أجلها Z عددا حقيقيا موجبا .

ب- حدد قيم θ التي من أجلها Z تخليا صرفا.

ب- حدد قيم θ التي من أجلها Z تخليا صرفا.

4) نعتبر المعادلة (E) التالية :

$$(E)\ z\in\mathbb{C}:\ z^3-ujz^2+u^2z-u^3j=0$$

أ- بين أن العدد $-iu$ حل للمعادلة (E) .

ب- حل المعادلة (E)

ج- بين أن صور حلول المعادلة (E) تنتمي إلى دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها.

التمرين 65:

نعتبر المستوى منسوبا إلى م.م.م.م.

وليكن f التطبيق من *C نحو C بحيث : $f(Z)=\frac{\overline{Z}+i}{Z}$

1) حدد مجموعة النقط التي لحقها z يحقق : $|f(Z)|=1$

2) حل في C المعادلة : $f\left(\frac{1}{Z}\right)=Z\overline{Z}$

3) نضع : $Z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث : $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

أ- مثل النقط B ,M,N التي ألحاقها : $i\ ,\ z\ ,\ \overline{z}$ على التوالي .

ب- لتكن P النقطة التي لحقها $\overline{Z}+i$.

تحقق من أن الرباعي ONPB معين .

و آستنتج عمدة $\overline{Z}+i$ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ .

ج- حدد معيار $f(z)$ بدلالة θ.

التمرين 66:

1)a- حل في C المعادلة $X^2-X+1=0$ ثم أكتب الجذرين على شكلهما المثلثي.

b- آستنتج حل النظمة في C^2 : $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x.y=1 \end{cases}$

بحيث $\text{Im}\,y^3\le 0$.

2) لتكن في C المعادلة $(E)z^3-3z-1=0$ و ليكن x و y عددي عقديين بحيث xy=1.

a- بين أن x+y جذر للمعادلة(E).

إذا وفقط إذاكان: $x^3+y^3=1$.

b- أستنتج مما سبق أن حلول المعادلة (E)

التمرين 67 :

n عدد صحيح طبيعي أكبر قطعا من1.

1) حدد على الشكل المثلثي الجذورالنونية لكل من :

$u=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ و $v=\frac{1-i\sqrt{3i}}{2}$.

2) حل في C المعادلة : $(1): z^{2n}-z^n+1=0$

3) أ- ليكن θ عددا حقيقيا يخالف $k2\pi$ لكل k من Z.بين أن : $\frac{\cos\theta+i\sin\theta+1}{\cos\theta+i\sin\theta-1}=-i\cot an\frac{\theta}{2}$

ب- حل في المعادلة $(2):\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=1$

ج- نعتبر في المستوى العقدي(P) النقطة A ذات اللحق1. .بين أن مجموعة صور حلول المعادلة (2), في (P) هي تقاطع المستقيمات (AM) مع محور الأراتيب حيث M تنتمي إلى مجموعة صور الجذور النونية للعددين u و v في المستوىP .

التمرين 68 :

لتكن U مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها1.

1) بين أنه لكل z من U :

$-1\le \text{Re}(z)\le 1$ و $-1\le \text{Im}(z)\le 1$

2) ليكن a و b عددين عقديين من U .

أ- بين أن : $\frac{(a+b)^2}{ab}=a\overline{b}+\overline{a}.b+2$

ب-أستنتج أن : $\frac{(a+b)^2}{ab}$ عدد حقيقي موجب .

3) ليكن z_1 و z_2 عقديين غير منعدمين. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م.م,النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقهما على التوالي هما z_1 و z_2.

و ليكن t لحق النقطة G مرجح النظمة المتزنة $\left\{\left(M_1;\frac{1}{|z_1|}\right),\left(M_2;\frac{1}{|z_2|}\right)\right\}$ نضع $a=\frac{z_1}{|z_1|}$ و $b=\frac{z_2}{|z_2|}$

أ-بين أن: $\frac{t^2}{z_1.z_2}=\frac{(a+b)^2}{ab}\times\frac{|z_1|\times|z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}$.

ب-نفترض أن: $a+b\neq 0$

بين أن (OG) هو حامل منصف $(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2})$.

هي : $S=\left\{2\cos\frac{\pi}{9};2\cos\frac{7\pi}{9};2\cos\frac{13\pi}{9}\right\}$.

cherifalix@hotmail.com
GSM :064865556

4) تطبيق : نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما 2+i و -2+11i

حدد معادلة ديكارتية لحامل منصف الزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.