دروس الدعم و التقوية مادة : الرياضيات	تمارين درس : المتتاليات ص1	الأستاذ : علي الشريف قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية.

التمرين رقم 1 :

أحسب الحدود $u_6\,;u_5\,;u_4\,;u_3\,;u_2\,;u_1\,;u_0$ للمتتالية (u_n) في كل حالة :

1) $u_n = 3n+4$ ، 2) $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$

3) $u_n = \frac{2n^2+3}{n+1}$ ، 4) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

5) $u_n = (-1)^n.2^{n+1}$ ، 6) $u_n = 4^n - 3^n$.

التمرين رقم 2 :

أدرس رتابة المتتاليات التالية :

1) $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ ، 2) $(n \geq 1)$ $u_n = (-1)^n.\frac{1}{n}$

3) $u_n = (n-5)^2$ ، 4) $u_n = \frac{n^2+1}{2n}$

5) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ ، 6) $u_n = n^2 - n$

7) $u_n = \sqrt{n}$ ، 8) $u_n = \frac{2^n}{n}$.

9) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$.

التمرين رقم 3 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_n = \frac{3n-1}{n}$

. $(n \geq 1)$

1) أدرس رتابة (u_n) .

2) بين أن (u_n) مكبورة ب 3 .

التمرين رقم 4 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$

1) أدرس رتابة المتتالية (u_n).

2) آستنتج أن (u_n) مكبورة .

التمرين رقم 5 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$

1) بين أن (u_n) تزايدية .

2) بين أن : $\forall n \in IN : \; u_n \in [-3;2[$.

التمرين رقم 6:

نعتبر في كل حالة المتتالية (u_n) حسابية :

1) $u_0 = -2$ ، الأساس 5 ، أحسب u_{20} .

2) $u_2 = 7$ ، $u_5 = 19$ أحسب u_{50} .

3) $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ ، $u_8 = 20$ أحسب u_0 و r

4) $u_1 + u_2 + u_3 = 9$ ، $u_{10} + u_{11} = 40$

أحسب u_0 و r.

ثم الجموع : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{30}$.

التمرين رقم 7 :

نعتبر في كل حالة المتتالية (u_n) هندسية :

1) $u_4 = 24$ ، $u_7 = 192$.أحسب u_{16} و u_1 .

2) $u_4 = 48$ ، $u_8 = 3$ أحسب u_0 في حالة $q \rangle 0$

3) $u_5 = 17$ ، $q = 4$ أحسب $u_5 + u_6 + ... + u_{13}$

4) (u_n) هندسية و $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ أحسب q في حالة $q \rangle 0$.

التمرين رقم 8 :

نعتبر المتتالية (u_n) هندسية تزايدية حيث جميع حدودها سالبة .

1) ماذا يمكن أ ن نقول عن أ ساسها ؟

2) إ ذا علمت أ ن :

$u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{19}{9}$ و $u_1 \times u_3 = \frac{4}{9}$

أحسب $u_3\,;u_2\,;u_1$.

3) أحسب u_n بدلالة n .

التمرين رقم 9:

(u_n) متتالية تزايدية ، (v_n) متتالية معرفة ب :

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + ...u_n) \;\; ; \;\; n \geq 1$$

بين أن : (v_n) تزايدية .

التمرين رقم 10:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$

1) لتكن (v_n) متتالية معرفة ب : $v_n = u_n - 1$
بين أن (v_n) هندسية .
2) حدد v_n بدلالة n .
3) آستنتج u_n بدلالة n.

التمرين رقم 11:

(u_n) متتالية بحيث : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases} \quad \forall \in IN$

(v_n) متتالية بحيث : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \quad \forall \in IN$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول v_0 .
2) أحسب (v_n) بدلالة n .
3) آستنتج (v_n) بدلالة n .

التمرين رقم13:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}.u_n + 5 \quad (n \in IN) \end{cases}$$

1) أحسب $u_4 ; u_3 ; u_2 ; u_1$.
2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n = u_n - 10$
بين أن (v_n) هندسية .
3) عبر عن (v_n) بدلالة n ثم (u_n) بدلالة n .
4) نضع : $S'_{10} = \sum_{k=0}^{k=10} v_k$ و $S_{10} = \sum_{k=0}^{k=10} u_k$
أحسب : S'_{10} و S_{10} .

التمرين رقم14:

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{2} ; u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}.u_n + \dfrac{2}{3}.u_{n-1} \end{cases}$$

1) بين أن : $\forall n \in IN : u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}.u_n + 1$
2) نعتبر المتتالية (v_n) حيث :
$n \in IN : v_n = u_n - \dfrac{3}{5}$
أ- بين أن: (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{2}{3}$.
ب – أحسب(v_n) ثم(u_n) بدلالة n .

التمرين رقم 15:

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 2. \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}.u_{n+1} - \dfrac{1}{2}.u_n \end{cases}$$

نضع : $n \in IN : \ v_n = u_{n+1} - u_n$
1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.
2) أحسب (v_n) بدلالة n .
3) أثبت أن : $(\forall n \in IN^*) : \ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0$
4) آستنتج قيمة بدلالةn .

التمرين رقم 16:

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}.u_n + n + 4 \end{cases} ; n \in IN$$

نضع : $v_n = u_n - 2n - 4$
1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.
2) أحسب (u_n) بدلالة n .
3) أحسب بدلالة n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

التمرين رقم 17:

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in IN^*)$$

1) بين أن :

$$(\forall k \in IN^*) \ \sqrt{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}$$

التمرين رقم 18:

2) آستنتج أنه :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \le \sqrt{n-1}+\sqrt{n}$$

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge 1}$ المعرفة ب : $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$

بين أن $(v_n)_{n\ge 1}$ تزايدية و أنها متقاربة .

التمرين رقم 19:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ المعرفة بما يلي :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+k}{n^4+k}$$

1) بين أن : لكل $1 \le k \le n$ لدينا :

$$\frac{k^3+k}{n^4+n} \le \frac{k^3+k}{n^4+k} < \frac{k^3+1}{n^4+1}$$

2) بين أن : لكل $n \ge 1$

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4.(n^4+n)} \le u_n \le \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4(n^4+1)}$$

لاحظ : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ و $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) آستنتج : $\lim\limits_{+\infty} u_n$.

التمرين رقم20:

I) نعتبر المتتالية (u_n) للأعداد الصحيحة الموجبة قطعا المعرفة لكل عدد صحيح طبيعي n بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n .

1) $u_n \ge n$

2) $u_n.u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

II) لتكن (α_n) و (β_n) المتتاليتين المعرفتين لكل عدد صحيح طبيعي n بما يلي :

$$\alpha_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} \quad \text{و} \quad \beta_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$$

1) أ - بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n :

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n}.u_{2n+1}}$$

ب – آستنتج أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n :

$$\alpha_n < \beta_n \quad \text{و} \quad 0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$$

2) أ- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n}.u_{2n+2}}$$

ب - بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n :

$$\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$$

ج – آستنتج تغيرات كل من المتتاليتين (α_n) و (β_n) .

3) أ- بين أن المتتاليتين (α_n) و(β_n) متحاديتين .

ب – أحسب نهاية كل من المتتاليتين (α_n) و (β_n) .

التمرين رقم 21:

a و b عددان حقيقيان بحيث $0<a<b$ ، λ و μ عددان حقيقيان موجبان قطعا :

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\ge 1}$ و $(v_n)_{n\ge 1}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda.v_n}{1+\lambda} \quad ; n \ge 1 \\ u_1 = a \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{u_n + \mu.v_n}{1+\mu} \quad ; n \ge 1 \\ v_1 = b \end{cases}$$

1) حدد λ و μ بحيث يكون $u_1 < u_2 < v_2 < v_1$

2) نفترض أن λ و μ يحققان الشرط الأول

أ – بين أن $(u_n)_{n\ge 1}$ تزايدية و مكبورة و أن $(v_n)_{n\ge 1}$ تناقصية و مصغورة

آستنتج أن هاتين المتتاليتين متقاربتين.

ب – بين أن $(u_n)_{n\ge 1}$ و $(v_n)_{n\ge 1}$ متحاديتين .

التمرين رقم 22:

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}.u_n^2 + 1} \quad ; n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n^2 - 2$

1) أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول .

الأستاذ : علي الشريف
قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية.

ب- آستنتج u_n بدلالة n .

2) أ- بين أن لكل x من IR+ :

$$\sqrt{1+x} \le 1+\frac{x}{2}$$

ب- آستنتج أن لكل n من IN :

$$\sqrt{2} \le u_n \le \sqrt{2}.\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ج – حدد نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

التمرين رقم 23:

$(u_n)_{n\ge1}$ متتالية حسابية حدودها موجبة قطعا بحيث :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=1$$

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي :

$$v_n=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+\dots+\frac{1}{a_{2n}}$$

بين أن $(v_n)_{n\ge1}$ متقاربة .

التمرين رقم 24:

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$u_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\dots+\frac{1}{n^2+2n+1}$$

1) بين أنه لكل n من IN :

$$\frac{2.n+1}{(n+1)^2}\le u_n\le\frac{2.n+1}{n^2+1}$$

2) آستنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

التمرين رقم 25:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي :

$$u_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times2^2}+\frac{1}{3\times2^3}+\dots+\frac{1}{n\times2^n}$$

1) بين أنه : $\forall k\in IN^*: 2^k\ge k+1$

و أن : $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

2) آستنتج أنه لكل n من IN* : $u_n\le1$

3) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة .

cherifalix@hotmail.com

التمرين رقم 26:

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفتين بما يلي :

$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

و

$$v_n=u_n+\frac{1}{n.n!}\quad(n\in IN^*)$$

1) بين أن $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متحاديتين .

2) لتكن L نهايتهما المشتركة . نفترض أن L عددا جذريا أي يوجد زوج $(p;q)\in IN^*\times IN^*$. بحيث :

$$L=\frac{p}{q}$$

أ – بين أنه يوجد عدد حقيقي θ بحيث :

$$L=u_q+\frac{\theta}{q.q!}$$

ب- بين أن :

$$q!.L=\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}+\frac{\theta}{q}$$

ج – آستنتج أن Lعدد لا جذري .

التمرين رقم 27:

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$u_0=2$ و $u_{n+1}=2+\frac{1}{u_n}$ لكل n من IN

1) بين أن : $(\forall n\in IN):\ 2\le u_n\le3$

2) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بما يلي :

$v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2.n+1}$ لكل n من IN

بين أنه لكل n من IN : $v_{n+1}=2+\frac{v_n}{1+2.v_n}$

و $w_n=2+\frac{1}{v_n}$ و $w_{n+1}=2+\frac{w_n}{1+2.w_n}$

3) أ – أثبت أن : $(\forall n\in IN): v_n\le w_n$

ب – أدرس رتابة كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n).

4) أ - بين أن :

$$(\forall n\in IN):\ w_{n+1}-v_{n+1}\le\frac{1}{25}.(w_n-v_n)$$

ب – آستنتج $\lim_{n\to+\infty}(w_n-v_n)$ ..

ج – بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) متحاديتين و حدد نهايتهما .

5) نضع : $\alpha=1+\sqrt{2}$.
أ – حدد عددا حقيقيا k بحيث :

$$(\forall n\in IN):|u_{n+1}-\alpha|\le k.|u_n-\alpha|$$

ب- آ ستنتج أ ن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين رقم 28:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t}}$$

و نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفتين بما يلي :

$$u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+....+\frac{n}{n^2}$$

و

$$v_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+....+f\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

نضع : $w_n=u_n-v_n$

1) بين أ ن لكل t من IR+ : $|f(t)-t|\le\frac{t^2}{2}$

2) بين أ ن لكل n من IN* : $|w_n|\le\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}$

3) آ ستنتج أ ن لكل n من IN* : $|w_n|\le\frac{1}{2.n}$

4) آ ستنتج أ ن : $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}$.

التمرين رقم 29:

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و (w_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}u_0=0\,;u_1=1\\ u_{n+2}=\frac{1}{5}.u_{n+1}-\frac{1}{10}.u_n\end{cases},n\in IN$$

و $\begin{cases}v_0=v_1=1\\ v_{n+2}=5.v_{n+1}-6.v_n\end{cases},n\in IN$

و $\begin{cases}w_0=1\,;\,w_1=0\\ w_{n+2}-w_{n+1}+\frac{1}{4}.w_n=0\end{cases},n\in IN$

1) حدد كلا من u_n و v_n و w_n بدلالة n .

2) أ حسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim_{n\to+\infty}w_n$.

التمرين رقم 30:

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2.v_n)\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}v_1=12\\ v_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n+3.v_n)\end{cases}$$

1) نضع لكل n من IN* : $w_n=v_n-u_n$
أ – بين أ ن: $(w_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية محددا أ ساسها و حدها الأول .
ب – حدد w_n بدلالة n ثم آ ستنتج نهاية $(w_n)_{n\ge1}$.

2) أ – بين أ ن : $\forall n\in IN^*:u_n\le v_n$
ب – بين أ ن المتتاليتان $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متحاديتان

التمرين رقم 31:

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=2.v_n\end{cases},n\in IN$$

و

$$\begin{cases}v_1=0\\ v_{n+1}=u_n+v_n\end{cases},n\in IN$$

1) أ حسب u_2 , v_2 , u_3 , v_3 .

2) ا حسب $u_{n+1}-v_{n+1}$ بدلالة u_n-v_n و آ ستنتج u_n-v_n بدلالة n .

3) أ – بين أ ن : $(\forall\in IN^*)\ \ u_{n+2}=u_{n+1}+2.u_n$
ب - بين أ ن :

$$(\forall n\in IN^*)\,u_{n+2}=2(u_1+u_2+....+u_n)$$

4) لتكن $(t_n)_{n\ge1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :
$t_n=u_{n+1}+k.u_n$ حيث k عدد حقيقي .
أ – بين أ نه إ ذا كانت $(t_n)_{n\ge1}$ هندسية :
فإ ن $k=-2$ أ و $k=?$
ب – نضع $x_n=u_{n+1}-2.u_n$ و $y_n=u_{n+1}+u_n$
▪ بين أ ن المتتاليتين $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ هندسيتان
▪▪ أ حسب x_n و y_n بدلالة n .
▪▪▪ آ ستنتج u_n و v_n بدلالة n .

التمرين رقم 32:

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\ u_0 = 1 \end{cases}, \quad n \in IN$$

1) أ- بين أن لكل n من IN : $u_n \rangle 0$

ب – بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$$v_n = u_n . \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية ثم حدد v_n بدلالة n .

ب – استنتج أن لكل n من IN :

$$u_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

3) نقبل أن لكل x من IR_+^* : $x - \frac{x^3}{6} \langle \sin(x) \langle x$

أ – بين أن لكل x من $]0,1]$: $1 \langle \frac{x}{\sin(x)} \langle 1 + x^2$

ب – استنتج أن لكل n من IN* :

$$\frac{2}{\pi} \langle u_n \langle \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

ج – بين أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين رقم 33:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0 , u_1 = 1 \end{cases}, n \in IN$$

1) حدد u_n بدلالة n .

2) بين أن :

$$(\forall n \in IN)\ u_{n+1}{}^2 - u_n \times u_{n+2} = (-1)^n$$

3) أحسب : $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

cherifalix@hotmail.com

التمرين رقم 34:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}, n \in IN$$

1) أ – بين أن: $\forall n \in IN : 0 \le u_n \le 2$

ب – بين أن u_n تزايدية

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in IN : v_n = 2 - u_n$$

أ – بين أنه لكل n من IN : $0 \le v_{n+1} \le \frac{1}{2} . v_n$

ب – استنتج أن لكل n من IN : $0 \le v_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n . v_0$

ج – استنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة .

3) نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in IN : w_n = 2^{n+1} \times \sqrt{2 - u_n}$$

أ – بين أنه توجد متتالية عددية (φ_n) بحيث لكل n من IN

$$u_n = 2.\cos(\varphi_n) \quad \text{و} \quad \varphi_n \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$$

ب - بين أنه لكل n من IN : $u_n = 2.\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)$

ج – استنتج أن (φ_n) متتالية هندسية ثم أحسب φ_n بدلالة n .

د – بين أن لكل n من IN :

$$w_n = 2^{n+2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

التمرين رقم 35:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \\ u_0 = 1 ; u_1 = 2 \end{cases}, n \in IN$$

نضع : $v_n = \frac{1}{2} . \sqrt{u_n}$ و $w_n = v_n - 1$

1) بين أنه إذا كانت (u_n) متقاربة و نهايتها L فإن :

$L = 4$ أو $L = 0$

2) بين أن لكل n من IN : $u_n \rangle 0$

3) بين أنه : $(\exists p \in IN^*) : u_p \ge 1$

4) استنتج أنه إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها L

6) بين أن لكل n من IN :

$$n \geq p \Rightarrow |w_{n+2}| \leq \frac{1}{3}.(|w_{n+1}|+|w_n|)$$

7) نعتبر المتتالية $(x_n)_{n\geq p}$ المعرفة بما يلي :

$$x_p = |w_p| \quad و \quad x_{p+1} = |w_{p+1}|$$

$$و \quad n \geq p; x_{n+2} = \frac{1}{3}.(x_{n+1}+x_n)$$

أ – حدد x_n بدلالة n .

ب – استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

التمرين رقم 36:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{1+u_n} \ ;n \in IN \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) أحسب : $u_1 \ ; u_2 \ ; u_3$

2) بين أن لكل n من IN : $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3) بين أن لكل n من * IN :

$$|u_{n+1}-u_n| \leq \frac{1}{4}.|u_n - u_{n-1}|$$

4) نعتبر المتتاليتين (α_n) و (β_n) المعرفتين بما يلي :

لكل n من IN : $\alpha_n = u_{2n}$ و $\beta_n = u_{2.n+1}$

أ - بين أن لكل n من IN : $\beta_n = 1+\frac{1}{1+\alpha_n}$

ب - بين أن لكل n من IN : $\alpha_n \leq \beta_n$

ج- بين أن المتتالية (α_n) تزايدية و أن المتتالية (β_n) تناقصية .

د- بين أن (α_n) و (β_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية يتم تحديدها .

5) أ – بين أن لكل n من IN :

$$|u_{n+2}-\sqrt{2}| \leq \frac{1}{4}.|u_n - \sqrt{2}|$$

و آستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

ب – حدد أصغر عدد صحيح طبيعي p بحيث يكون لدينا :

$$|u_p - \sqrt{2}| \langle 10^{-2}$$

التمرين رقم 37:

ليكن a عدد حقيقي بحيث : $0 \langle a \langle \frac{\pi}{4}$

* $(u_n)_{n\in IN}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1+\dfrac{1}{2\sin^2(a)} \quad , \ n \in IN^* \\ u_{n+1} = \cos(2a).u_n + 1 \end{cases}$$

1) بين أن : $\forall n \in IN^*: \quad u_n \rangle 1$

2) نعتبر : $(n \in IN^*): v_n = u_n - \frac{1}{2.\sin^2(a)}$

أ – بين أن $(v_n)_{n\in IN^*}$ متتالية هندسية .

ب – عبر عن v_n بدلالة n و a ثم عن u_n بدلالة n و a

ج – أ درس تقارب المتتاليتين $(u_n)_{n\in IN}$ * و $(u_n)_{n\in IN}$ *

3) لكل n من IN* نضع :

$$S_n = u_1 + u_2 + ...+u_n$$

أ – عبر عن S_n بدلالة n .

ب – أ حسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

4) أ عط قيمة S_3 و $\cos(a)$.

التمرين رقم 38:

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3}+n-1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

و $v_n = 4.u_n - 6.n + 15$

1) بين أن $(v_n)_{n\geq0}$ المتتالية هندسية .

2) أحسب v_n بدلالة n و ثم آستنتج أن :

$$u_n = \frac{19}{4\times3^n}+\frac{6n-15}{4}$$

3) بين أنه يمكن كتابة u_n على شكل مجموع متتالية هندسية T_n و متتالية حسابية w_n .

4) أحسب :

$$S_n = T_0 + T_1 + ...+T_n$$

$$S'_n = W_0 + W_1 + ...+W_n$$

$$S''_n = U_0 + U_1 + ...+U_n$$

cherifalix@hotmail.com

التمرين رقم 39:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0, u_1 = 1 \end{cases}, n \in IN$$

1) أحسب u_5, u_4, u_3, u_2

2) ليكن α و β حلول المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ حيث $\alpha \rangle 0$

أ - بين أنه يوجد عددين حقيقيين A و B بحيث ($A + B = U_0$ و $\alpha.A + \beta.B = U_1$).

ب- بين أن لكل n من IN : $A.\alpha^n + B.\beta^n = U_n$

3) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + ...u_n$

أ – عبر عن S_n بدلالة n .

ب - أ درس تقارب المتتالية S_n .

4) نضع : $(n \in IN)$ $F_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

أ – عبر عن F_n بدلالة n .

ب - أ درس تقارب المتتالية F_n .

التمرين رقم 40:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1) أ رسم المنحنى الممثل للدالة المعرفة على IR^+ ب $x \to \sqrt{x}$ ، و المستقيم الذي معادلته $y = x$ ، مثل النقط $A_n(u_n, 0)$ و $B_n(u_n, u_{n+1})$ و $C(u_{n+1}, u_{n+1})$ من أجل $n = 0,1,2,3,4$.
هل المتتالية (u_n) رتيبة ؟ هل متقاربة ؟

2) أ – بين أن لكل n من IN : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1}$

ب – أستنتج أن إشارة $u_n - 1$ ثابتة .

3) بين أن لكل n من IN : $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$

بين أن لكل n من IN : $0 \leq u_n - 1 \leq \dfrac{1}{2^n}(u_0 - 1)$

أحسب نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$.

cherifalix@hotmail.com

التمرين رقم 41:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ و قابلة للإشتقاق على $]a, b[$ بحيث : $f([a, b]) \subset]a, b[$
نفترض أ نه :

$$(\exists k \in [0,1[)\ (\forall x \in]a, b[)\ |f'(x)| \leq k$$

1) بين أ نه : $(\exists!\ \alpha \in [a, b])\ /\ f(\alpha) = \alpha$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in IN): u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 \in [a, b]$$

أ – بين أن : $(\forall n \in IN):\ a \leq u_n \leq b$

ب – بين أن : $(\forall n \in IN):\ |u_{n+1} - \alpha| \leq k.|u_n - \alpha|$

ج – أستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3) تطبيق : نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in IN):\ u_{n+1} = 3 + \frac{1}{u_n} \text{ و } u_0 \in [3;4]$$

حدد نهاية المتتالية (u_n) .

لتمرين رقم 42:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة في IN ب:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in IN \quad u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

1) بين أن المتتالية التي حدها العام $v_n = u_{n+1} - u_n$ متتالية هندسية.

2) عبر عن v_n بدلالة n. ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين رقم 43:

لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالآتي:

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in IN\ \ v_n = \frac{1}{3}v_n + \frac{4}{3} \end{cases}$$

1) بين أن المتتالية (u_n) المعرفة: $\forall n \in IN \quad u_n = v_n - 2$ متتالية هندسية.

2) احسب: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ثم استنتج: $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

3) احسب:

$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$

ثم استنتج: $\prod_n = u_0 \times u_1 \times .... \times u_n$

التمرين رقم 44:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة في IN ب:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in IN \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$$

1) بين أن مهما يكن $n \in IN$ فإن: $u_n \neq 1$

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بالعلاقة:

$$\forall n \in IN \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية.

احسب اذن v_n ثم u_n بدلالة n و ادرس تقارب u .

التمرين رقم 45:

I- نعتبر المتتالية (u_n) و المعرفة كالآتي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in IN \quad S_n = u_0 + u_1 + u_2 .... + u_n = \dfrac{n^2 : n}{3} \end{cases}$$

1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) احسب u_n و u_{n+1} بدلالة n .

3) استنتج طبيعة المتتالية (u_n) مع تحديد أساسها.

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in IN \quad \prod_n v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n = \dfrac{1}{3^{n^2} + n} \end{cases}$$

1) احسب v_1 ، v_2 ، v_3 .

2) احسب v_n و v_{n+1} بدلالة n .

3) استنتج طبيعة المتتالية $(v_n)_{n \in IN}$ مع تحديد أساسها.

التمرين رقم 46:

1) بين أنه:

$$\begin{cases} \forall n \in IN^*, \forall p \in IN \\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right).....\left(1+\dfrac{1}{n+p}\right) = 1 + \dfrac{p+1}{n} \end{cases}$$

2) استنتج بأن المتتالية التي حدها العام:

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right).....\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

متقاربة.

التمرين رقم 47:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in IN), \quad u_{n+1} = \dfrac{2u^2_n + u_n - 2}{u^2_n} \end{cases}$$

1) بين أن: $(\forall n \in IN) \quad u_n \rangle 2$

2) بين أن: $(\forall n \in IN) \quad u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

3) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 48:

1) بين أنه يمكن إيجاد الزوج $(\alpha, \beta) \in IR^2$ بحيث:

$$2\,(\forall n \in IN)^* \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1}$$

2)استنتج ان المتتالية التي حدها العام: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

3) نضع: $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$ من أجل $\forall n \in IN^*$ بين أن $(v_n)_{n \in IN^*}$ متقاربة.

التمرين رقم49:

لتكن s مجموعة المتتاليات المعرفة في المجموعةIN و التي تحقق العلاقة الترجعية الآتية:

$$(\forall n \in IN): u_{n+2} = \frac{1}{4} u_n$$

1) أوجد متتاليتين هندسيتين (a^n) و (b^n) ينتميان إلى s

2) بين أن المتتالية $(c\,a^n + d\,b^n)$ تنتمي إلىS .(c و d عددين حقيقين)

3) لتكن المتتالية $(u_n)_n$ عنصرا من S بحيث:

$$u_0 = u_1 = 1$$

احسب u_n بدلالة n ثم ادرس $\lim_{n \to +\infty} (u_n)$.

التمرين رقم 50:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n^{\,2} - 2u_n + 2 \end{cases}$$

1) a - بين أن $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ لكل n من IN .

(لاحظ أن $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$)

b- بين أن (u_n) تناقصية.

2) a- بين أن:

$$\forall n \in IN: u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

ثم استنتج أن: $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

b- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم51:

لتكن المتتالية الحقيقية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in IN, u_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + u_n + 8\sqrt{1+u_n}\right) \end{cases}$$

1)أ- احسب u_1 و u_2 .

ب- أثبت أن: $u_n \geq 0$ لكل n ينتمي إلى IN .

2) نضع $v_n = \sqrt{1+u_n}$ لكل n من IN .

احسب v^2_{n+1} بدلالة v_n و استنتج أن:

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + 4)$$

3) لتكن (w_n) المتتالية الحقيقية المعرفة ب:

$$(\forall n \in IN) \quad : \ w_n = v_n - \frac{4}{3}$$

أ- بين أن (w_n) متتالية هندسية و حدد حدها الأول و أساسها.

ب- أحسب (w_n) بدلالة n و استنتج v_n و u_n بدلالة n.

ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين رقم 52:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول.

$u_0 = \frac{3}{2}$ و بالعلاقة : $\quad u_{n+1} = \frac{u^2_n + u_n}{u^2_n + 1}$

1) بين أن: $u_n - 1 > 0$ لكل n من IN ثم ادرس رتابة (u_n).

2) أ- بين أن: $0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_{n-1})$ لكل n من IN

ب- استنتج أن $0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ لكل n من IN

حدد نهاية (u_n).

التمرين رقم 53:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \quad \forall n \in IN \end{cases}$$

1) برهن على أنه: $\forall n \in IN \ : \ 0 < u_n < 3$

2) لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$\forall n \in IN : V_n = 3 - u_n$

a- بين أنه: $\forall n \in IN : 0 < v_{n+1} < \frac{1}{3} v_n$

b- استنتج أن: $\forall n \in IN : \ v_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c- احسب $\lim v_n$ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة و أحسب نهايتها.

لتمرين رقم 54:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 \\ \forall n \in IN^*, u_{n+1} + 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} \end{cases}$$

لتكن المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\forall n \in IN^* : v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1) بين أن: (v_n) متتالية هندسية و حدد عنصرها.

2) احسب v_n و u_n بدلالة n.

3) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

4) نعتبر المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 .... + u_n$

حيث $\forall n \in IN^*$.

بين أن: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... \frac{1}{n} = 2^{n+1} - S_n - 2$

cherifalix@hotmail.com