سلسلة من اقتراح الأستاذ : بوكطاي حسن

سلسلة تمارين المتتاليات العددية

التمرين 1 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1+2u_n}{u_n} \end{cases}$

و المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

1) بين أن (v_n) متتالية حسابية .

2) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

التمرين 2 :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r \neq 0$ و حدها الأول $u_0 = 1$ بحيث u_1 و u_4 و u_{13} في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .

1) أ) احسب الأساس r

ب) احسب u_3 و u_{20} .

2) احسب المجموع : $S = u_3 + u_4 + ... + u_{20}$.

التمرين 3 :

لتكن (a_n) متتالية هندسية بحيث : $a_4 = \dfrac{1}{2}$ و $a_8 = 8$.

1) حدد أساس المتتالية (a_n) .

2) احسب المجموع : $S = a_4 + a_5 + ... + a_8$.

التمرين 4 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = -\dfrac{1}{3}$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1-2u_n}$

1) احسب u_1 و u_2

2) بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \prec 0$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية .

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n .

ج) احسب بدلالة n المجموع : $S=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+....+\frac{1}{u_n}$.

التمرين 5 :

احسب النهايات التالية :

(1 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\sin^n(\frac{\pi}{6}).\tan^n(\frac{\pi}{3})$

(3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

التمرين 6 :

نعتبر المتتالية المعرفة ب : $u_0=\frac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

1) أ) بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}: 0\prec u_n\prec 1$.

ب) ادرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية .

ب) احسب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 7 :

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+....+\frac{n}{n^2+n}$

أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{n^2}{n^2+n}\le u_n\le\frac{n^2}{n^2+1}$.

ب) استنتج : $\lim_{n\to+\infty}u_n$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $\forall n\in\mathbb{N}^*: v_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}$

أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: \sqrt{n}\le v_n$

ت) استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty}v_n$

التمرين 8 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n}$

1) أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$

ب) بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \prec u_n \prec 2$

ج) بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{3u_n}{1+3u_n} \prec \frac{6}{7}$.

ب) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 2 - u_n \prec \left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 9 :

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_0 = 2 ; u_1 = \frac{4}{9} \\ u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n = u_n - \frac{1}{3^n} ; n \in \mathbb{N}$.

3) بين بالترجع أن : $v_n = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} ; n \in \mathbb{N}$.

4) بين أن (v_n) متتالية هندسية .

5) احسب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 10 :

نعتبر (u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1-u_n^3}{7}} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ و $v_n = 3u_n^3 - 1$.

3) أ) بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$

ب) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : -1 < v_n < 7$.

4) بين أن (v_n) متتالية هندسية.

5) احسب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 11 :

1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[2,3]$ ب : $f(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$.

أ) اعط جدول تغيرات f على I .

ب) بين أن : $f(I)\subset I$.

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n+2}{u_n+3}; n\in \mathbb{N} \end{cases}$.

باستعمال السؤال 1) بين بالترجع أن :

أ) $\forall n\in \mathbb{N}: 2\le u_n\le 3$

ب) (u_n) متتالية تزايدية .

3) بين أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين 12 :

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $I=[2,3]$ ب : $f(x)=\dfrac{x^2}{2-3x^2}$.

1) بين أن f تقابل من $I=\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ نحو مجال J يتم تحديده .

2) نعتبر المتتالية المعرفة ب : $a\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ ، $u_0=a$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2-3u_n^2}$.

ت) بين أن : $\forall n\in \mathbb{N}: 0<u_n<\dfrac{1}{2}$.

ث) بين أن : $\forall n\in \mathbb{N}: u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}(1+u_n)(3u_n-2)$.

ج) ادرس رتابة (u_n) .

ج) تحقق أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 13 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{4+u_n}-2 \end{cases}$

سلسلة من اقتراح الأستاذ : بوكطاي حسن

1) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$.

2) بين أن (u_n) تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

4) حدد : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5) أ) تحقق أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+\sqrt{4+u_n}}$.

ب) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \le \dfrac{1}{2} u_n$.

5) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ثم احسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 14 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب : $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

1) أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ب) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \le x$.

ج) حدد صورة المجال $[0,1]$ بالدالة f .

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

أ) تحقق أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le u_n \le 1$.

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

التمرين 15 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

6) أ) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \le x$.

ب) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $[0,1[$.

7) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a. بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$.

b. بين أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

التمرين 16 :

لتكن المتتاليةالمعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) احسب : u_2 و u_3 .

2) نضع : $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n ; n \in \mathbb{N} \\ w_n = \frac{u_n}{v_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

أ) بين أن (v_n) هندسية محددا أساسها ثم احسب $S = v_3 + v_4 + ...v_{10}$.

ب) بين أن (w_n) حسابية محددا أساسها .

ج) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

3) أ) تحقق أن : $\forall n > 4 : 2n^2 > (n+1)^2$.

ب) بين بالترجع أن : $\forall n > 4 : 2^n > n^2$.

ج) اثبت أن : $\forall n > 4 : 0 < u_n < \frac{2}{n}$.

د) احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

التمرين 17 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$.

1) حدد $f(]0,2[)$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^2 + 2u_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2$.

ب) بين أن (u_n) متتالية تزايدية .

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

التمرين 18 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \sqrt[3]{\frac{4}{2 + u_n^3}} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

3) بين بالترجع أن : $u_n > 0$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \sqrt[3]{2}$.

4) بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .

5) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة ب : $v_n = \frac{2}{u_n^3} - 1; n \in \mathbb{N}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) حدد (v_n) ثم (u_n) بدلالة n .

ج) احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

د) احسب المجموع : $S = 2\left[\left(\frac{1}{u_0}\right)^3 + \left(\frac{1}{u_1}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{u_{n-1}}\right)^3\right]$ بدلالة n .

التمرين 19 :

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين ب :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}; n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

1) نضع : $w_n = u_n - v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية محددا أساسها.

ب) عبر عن w_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} w_n$.

1) بين أن (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية .

2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : v_0 \le v_n \le u_n \le u_0$.

3) استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتين و لهما نفس النهاية l .

4) نضع : $\forall n \in \mathbb{N} : t_n = 2u_n + 5v_n$.

أ) بين أن (t_n) متتالية عددية ثابتة محددا قيمتها .

ب) استنتج قيمة النهاية l .

التمرين 20 :

نعتبر f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x : $f(x) = x\sqrt{1+x^2} - x^2$ حيث (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x)$ ثم ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) .

2) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$ ثم اعط جدول تغيرات f .

3) أ) اعط معادلة المماس ل (C_f) عند $O(0,0)$.

ب)بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \le x$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج) أنشئ المنحنى (C_f) .

4) أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده .

ب)حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

ج) أنشئ $(C_{f^{-1}})$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

أ) بين أن (u_n) متتالية تناقصية .

ب) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq -\dfrac{3}{4}$ و أن $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{1+u_n^2} - u_n \geq 2$.

ج) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1}| \geq 2|u_n|$ ثم استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \geq \dfrac{3}{4}.2^n$.

د) احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

هل تستطيع أن تملأ قنينة باتباع التعليمات التالية : املأ نصف القنينة ثم املأ نصف الفراغ المتبقي ثم املأ من جديد نصف الفراغ المتبقي .... و هكذا .... ؟؟؟!