سلسلة من اقتراح الأستاذ : بوكطاي حسن

سلسلة تمارين المتتاليات العددية(تابع)

التمرين 14 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب : $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

1) أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ب) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ : f(x)\leq x$.

ج) حدد صورة المجال $[0,1]$ بالدالة f .

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n);n\in\mathrm{N}\end{cases}$.

أ) تحقق أن : $\forall n\in\mathrm{N}:0\leq u_n\leq 1$.

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين 15 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1) أ) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ : f(x)\leq x$.

ب) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $[0,1[$.

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n);n\in\mathrm{N}\end{cases}$.

a. بين أن $\forall n\in\mathrm{N}:0<u_n<1$.

b. بين أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين 16 :

لتكن المتتاليةالمعرفة ب : $\begin{cases} u_0=-1, u_1=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+2}=u_{n+1}-\dfrac{1}{4}u_n;n\in\mathrm{N}\end{cases}$.

1) احسب : u_2 و u_3 .

2) نضع : $\begin{cases} v_n=u_{n+1}-\dfrac{1}{2}u_n;n\in\mathrm{N} \\ w_n=\dfrac{u_n}{v_n};n\in\mathrm{N}\end{cases}$.

أ) بين أن (v_n) هندسية محددا أساسها ثم احسب $S=v_3+v_4+....v_{10}$.

ب) بين أن (w_n) حسابية محددا أساسها .

ج) استنتج أن : $\forall n\in\mathrm{N}:u_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$.

3) أ) تحقق أن : $\forall n > 4 : 2n^2 > (n+1)^2$.

ب) بين بالترجع أن : $\forall n > 4 : 2^n > n^2$.

ج) اثبت أن : $\forall n > 4 : 0 < u_n < \frac{2}{n}$.

د) احسب : $\lim_{x \to +\infty} u_n$.

التمرين 17 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$.

1) حدد $f(]0,2[)$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^2 + 2u_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2$.

ب) بين أن (u_n) متتالية تزايدية .

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب $\lim_{x \to +\infty} u_n$.

التمرين 18 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \sqrt[3]{\frac{4}{2 + u_n^3}} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) بين بالترجع أن : $u_n > 0$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \sqrt[3]{2}$.

2) بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة ب : $v_n = \frac{2}{u_n^3} - 1 ; n \in \mathbb{N}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) حدد (v_n) ثم (u_n) بدلالة n .

ج) احسب: $\lim_{x \to +\infty} u_n$.

د) احسب المجموع : $S = 2\left[\left(\frac{1}{u_0}\right)^3 + \left(\frac{1}{u_1}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{u_{n-1}}\right)^3\right]$ بدلالة n .

التمرين 19 :

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين ب :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) نضع : $w_n = u_n - v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية محددا أساسها.

ب) عبر عن w_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{x \to +\infty} w_n$.

سلسلة من اقتراح الأستاذ : بوكطاي حسن

1) بين أن (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية .

2) بين أن : $\forall n\in \mathbb{N}: v_0 \le v_n \le u_n \le u_0$.

3) استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتين و لهما نفس النهاية l .

4) نضع : $\forall n\in \mathbb{N}: t_n = 2u_n + 5v_n$.

أ) بين أن (t_n) متتالية عددية ثابتة محددا قيمتها .

ب) استنتج قيمة النهاية l .

التمرين 20

نعتبر f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x : $f(x) = x\sqrt{1+x^2} - x^2$ حيث (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ ثم ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) .

2) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x) = \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$ ثم اعط جدول تغيرات f .

3) أ) اعط معادلة المماس ل (C_f) عند $O(0,0)$.

ب)بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\le x$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج) أنشئ المنحنى (C_f) .

4) أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده .

ب)حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

ج) أنشئ $(C_{f^{-1}})$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n); n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

أ) بين أن (u_n) متتالية تناقصية .

ب) استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n \le -\dfrac{3}{4}$ و أن $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{1+u_n^2} - u_n \ge 2$.

ج) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: |u_{n+1}| \ge 2|u_n|$ ثم استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}: |u_n| \ge \dfrac{3}{4}.2^n$.

د) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

هل تستطيع أن تملأ قنينة باتباع التعليمات التالية :
املأ نصف القنينة ثم املأ نصف الفراغ المتبقي ثم املأ من جديد نصف الفراغ المتبقي .... و هكذا .... ؟؟؟!