تصحيح تمارين في الهندسة الفضائية Boumanzah-Tanan

التمرين 1)

أ- لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -2 & -1\\ \vec{j} & -2 & -1\\ \vec{k} & 1 & 3\end{vmatrix}=-5\vec{i}-5\vec{j}$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) فانه لدينا:

$$\begin{aligned} M\in(ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0\\ &\Leftrightarrow -5(x-1)-5(y-2)=0\\ &\Leftrightarrow -5x-5y+5=0\\ &\Leftrightarrow x+y-1=0\end{aligned}$$

ومنه معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) هي: $x+y-1=0$

ب- مساحة المثلث ABC هي : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

التمرين 2)

$\vec{n}(1,1,1)$ تعتبر متجهة منظمية على المستوى (P)

$\vec{n}'(2,-1,-1)$ تعتبر متجهة منظمية على المستوى (P')

بما أن $\vec{n}\wedge\vec{n}'=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & 2\\ \vec{j} & 1 & -1\\ \vec{k} & 1 & -1\end{vmatrix}=3\vec{j}-3\vec{k}\neq\vec{0}$ فان (P) و (P') يتقاطعان

لنحدد نقطة تنتمي إلى المستويين (P) و (P'):

$$\begin{cases} x+y+z-1=0\\ 2x-y+z=0\\ z=0\end{cases}$$

ومنه $\begin{cases} x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{2}{3}\\ z=0\end{cases}$ وبالتالي فإن $(P)\cap(P')=(\Delta):\begin{cases} x=\frac{1}{3}-5t\\ y=\frac{2}{3}-5t\\ z=0\end{cases}\quad (t\in IR)$

التمرين 3)

1) أ- لدينا $\overrightarrow{AB}(-2,2,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,2)$ ومنه بإضا فة سطرين $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

فإنه لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ وبما أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب- مساحة متوازي الأضلاع هي $S_{ABKC} = \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{45}$

2) أ- لدينا $\overrightarrow{BC}(2,-1,3)$ ومنه تمثيل بارمتري للمستقيم (BC) هو :

$$(BC): \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-t \quad (t \in IR) \\ z = 3t \end{cases}$$

ب- لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ومنه $d(A,(BC)) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right\|}{\left\| \overrightarrow{BC} \right\|} = \sqrt{\dfrac{45}{14}}$

التمرين4)

1) لدينا $a^2+b^2+c^2-d = \dfrac{19}{4} \succ 0$ و

$$x^2+y^2+z^2-6x-2z+\frac{21}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+(z-1)^2 = (\tfrac{\sqrt{19}}{2})^2$$

ومنه (S) فلكة مركزها $\Omega(3,0,1)$ وشعاعها $R = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$

2) أ- لدينا $d(\Omega,(P)) = \dfrac{|8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 4\sqrt{2}$

ب- بما أن $4\sqrt{2} > R$ فإن $(S)\cap(P) = \varnothing$

التمرين5)

معادلة ديكارتية للفلكة (S):

$$(S): (x+1)^2+(y-1)^2+z^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$$

2) أ- - لدينا $d(\Omega,(P)) = \dfrac{|4|}{\sqrt{4}} = 2$ وبما أن $d(\Omega,(P)) = R = 2$ فإن المستوى (P) مماس للفلكة (S)

ب- لنضع $(P)\cap(S) = \{H\}$ حيث H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P)

لهذا لنحدد تمثيلا بارمتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي

على المستوى (P) : $(t \in IR)$ $(\Delta): \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+t \\ z = -\sqrt{2}\,t \end{cases}$ ثم لنحل $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+t \\ z = -\sqrt{2}\,t \\ x + y - \sqrt{2}\,z - 4 = 0 \end{cases}$

بعد التعويض نجد أن $t = 1$ وبالتالي $H\,(0, 2, -\sqrt{2})$