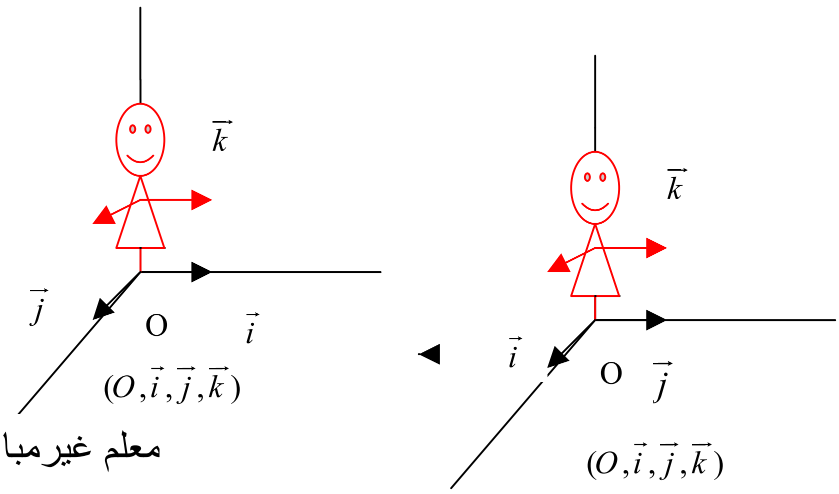
C) الجداء المتجهي

1) توجيه معلم في الفضاء

الفضاء E منسوب الى معلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

إذا وقف" رجل أمبير" حيث قدماه على النقطة O ورأسه في النقطة K وهو ينظر الى النقطة I فان النقطة J إما توجد على يمينه أو على يساره



معلم غيرمبا شر

معلم مبا شر

الفضاء E منسوب الى معلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

I و J و K ثلاث نقط بحيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{ok}$

نقول ا ن $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر اذا كانت J النقطة على يسار "رجل أمبير"

وإذا كانت J على يمينه فإن المعلم غير مباشر

ملاحظة : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم مباشر $\Leftrightarrow$ ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم مباشر $\Leftrightarrow$ الأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر

2) تعريف الجداء المتجهي

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من الفضاء الموجه V_3 بحيث $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

نرمز للجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا لترتيب ب: $\vec{u}\wedge\vec{v}$

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غيرمستقيميتين فإن الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ هو المتجهة $\vec{w}$ بحيث $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ تحقق ما يلي :

*المستقيم (OC) عمودي على المستوى (OAB)

* ثلاثي الأوجه (OA,OB,OC) مباشر

* $\|\overrightarrow{OC}\|=\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|\sin\theta$

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ هو المتجهة المنعدمة

3) خاصيات

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات في الفضاء المتجهي الموجه و α عددحقيقي

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$

$$(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = (\vec{u} \wedge \alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow$ مستقيميتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$

4) إحداثيات الجداء المتجهي

الفضاء E منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

إذا كانت $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ متجهتين من V_3 فإن مثلوث احداثيات الجداء المتجهي $\vec{u} \wedge \vec{v}$ هو: $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$

ملاحظة : يمكن الحصول على إحداثيات $\vec{u} \wedge \vec{v}$ بإضافة سطرين $\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \\ x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$

لتحديد أفصول $\vec{u} \wedge \vec{v}$ نلغي السطر الأول ثم نحسب المحددة التي تليه $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$

لتحديد أرتوب $\vec{u} \wedge \vec{v}$ نلغي السطر الثاني ثم نحسب المحددة التي تليه $\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$

لتحديد أنسوب $\vec{u} \wedge \vec{v}$ نلغي السطر الثالث ثم نحسب المحددة التي تليه $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

5) تطبيقات الجداء المتجهي

لتكن A,B,C,K نقط في الفضاء E المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

إذا كان $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n}$ فإن $\vec{n}$ تعتبر متجهة منظمية على المستوى (ABC)

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

ومنه نحصل على معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

- مساحة المثلث ABC هي: $S = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$
- مساحة متوازي الأضلاع $ABKC$ هي: $\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$
- مسافة نقطة M عن المستقيم $D(A,\vec{u})$ هي: $d(A,D) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|}$
- لتكن $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متجهتين منظميتين على التوالي على المستويين (P) و (P')

- إذا كـان $\vec{n}\wedge\vec{n}'\neq\vec{0}$ فـإن (P) و (P') يـتقاطعان وفـق مسـتقيم (Δ) مـوجه بالمتجهة $\vec{n}\wedge\vec{n}'$