

تمرين (1) لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) بحيث :
$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{-1 + 2u_n}{u_n} \end{cases}$$

- (1) بين أن (v_n) متتالية حسابية .
(2) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

تمرين (2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حيث : $u_0 = 0; u_1 = 1; u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$

- نضع : $v_n = u_{n+1} - u_n$ لكل n من \mathbb{N} .
(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .
(ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

تمرين (3) (u_n) متتالية هندسية حيث : $u_2 = 2$ و $u_5 = \frac{2}{27}$

- (1) حدد أساس المتتالية (u_n) .
(2) (v_n) متتالية حيث : $v_n = 3^n u_n - n$ لكل n من \mathbb{N}^* .
(أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول .
(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S = 3^1 u_1 + 3^2 u_2 + 3^3 u_3 + \dots + 3^n u_n$

تمرين (4) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \sqrt[3]{\frac{4}{2 + u_n^3}}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (1) بين بالترجع أن : $u_n > 0$ و $u_n \leq \sqrt[3]{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
(2) بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .
(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة ب : $v_n = \frac{2}{u_n^3} - 1; n \in \mathbb{N}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(ب) حدد (v_n) ثم (u_n) بدلالة n .

(ج) احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

(د) احسب بدلالة n المجموع :
$$S = 2 \left[\left(\frac{1}{u_0} \right)^3 + \left(\frac{1}{u_1} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{u_{n-1}} \right)^3 \right]$$

تمرين 5 لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [2, 3]$ ب : $f(x) = \frac{5x+2}{x+3}$.

(أ) اعط جدول تغيرات f على I (ب) بين أن : $f(I) \subset I$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب :

$$\begin{cases} u = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 3}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \leq u_n \leq 3$

(ب) بين أن (u_n) متتالية تزايدية .

(ج) استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

تمرين 6 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n}$

(1) (أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+3u_n} (2 - u_n)$

(ب) بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2$

(ج) بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) (أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$

(ب) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$

(ج) احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 7 لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ ب : $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

(1) (أ) بين أن f تقابل من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R}^+ .

(ب) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leq x$.

(ج) حدد صورة المجال $[0, 1]$ بالدالة f .

(2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(أ) تحقق أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1$.

(ب) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

من اقتراح الأستاذ: عبد الرحيم الأصعب