ثنان رشيد

بسم الله الرحمـن الرحيم

تصحيح تمارين في الهندسة الفضائية　　لمستوى: السنة الثالثة ثانوي　　شعبة: العلوم التجريبية

تمرين1:

1) Δ مستقيم يمر من $A(3,1,-2)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(1,0,2)$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من Δ إذن يوجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

لدينا $\begin{cases} x-3=t \\ y-1=-t \\ z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ إذن $\begin{cases} x=t+3 \\ y=-t+1 \\ z=-2 \end{cases}$ تمثيل بارمتري للمستقيم Δ.

2) لنحدد معادلتين ديكارتيتين للمستقيم Δ : لدينا $\begin{cases} x=t+3 \\ y=-t+1 \\ z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=t \\ 1-y=t \\ z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1-y \\ z=-2 \end{cases}$

D_2 مستقيم يمر من $B(1,0,2)$ و موجه بالمتجهة $\vec{v}(0,0,3)$ لنحدد معادلتين ديكارتيتين للمستقيم D_2 :

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من D_2 إذن يوجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{BM}=t\vec{v}$

لدينا : $\overrightarrow{BM}=t\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \\ z-2=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

3) لنحدد معادلة ديكارتية للمستوى P المار من $A(3,1,-2)$ والموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{w_1}(1,-1,0)$ و $\overrightarrow{w_2}(2,0,3)$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى P إذن $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2})=0$

لدينا:

$$\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z+2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-3)-3(y-1)+2(z+2)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+9-3y+3+2z+4=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+3y-2z-16=0$$

تمرين2:

1) Δ مستقيم معرف بالمعادلتين: $x-1=\dfrac{y-1}{2}$ و $z=5$ لنحدد تمثيلا بارمتريا له

نضع $x-1=t$ يصبح لدينا : $\begin{cases} x-1=t \\ \dfrac{y-1}{2}=t \\ z=5 \end{cases}$ إذن: $(*)\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=5 \end{cases}$

2) P مستوى يمر من النقطة $A(2,3,0)$ ويتضمن المستقيم Δ

حسب **(*) فإن** Δ يمر من $B(1,1,5)$ وموجه بالمتجهة $\vec{v}(1,2,0)$ لنحدد معادلة ديكارتية للمستوى P

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى P إذن $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\vec{v})=0$

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2,y-3,0)$ و $\overrightarrow{AB}(-1,-2,5)$

$$\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ y-3 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}=0$$

إذن:

$$\Leftrightarrow -10(x-2)+5(y-3)=0$$
$$\Leftrightarrow 10x-5y-5=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-y-1=0$$

4) نعتبر المتجهة $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ والنقطة $B(2,3,0)$

أ) لنحدد تمثيلا بارمتريا للمستقيم $D(B,\vec{u})$:

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من D إذن يوجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{BM}=t\vec{u}$

لدينا: $\overrightarrow{BM}=t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=t \\ y=-t \\ z-2=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=2+t \end{cases}$

ب) تقاطع P و Δ:

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من $P\bigcap\Delta$ إذن يوجد عدد حقيقي t حيث: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=5 \end{cases}$ و $2x-y-1=0$

لدينا: $0=0 \Leftrightarrow 2(1+t)-1-2t-1=0 \Leftrightarrow 2x-y-1=0$ إذن $P\bigcap\Delta=\varnothing$

تمرين3:

نعتبر D مستقيم معرف بالمعادلتين: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}$ و $z-1=0$ لنحدد تمثيلا بارمتريا له

1) نضع $\frac{x+1}{2}=t$ إذن $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+3t \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2t \\ y-1=3t \\ z-1=0 \end{cases}$ إذن المستقيم D موجه بالمتجهة: $\vec{u}(2,3,0)$

Δ مستقيم مواز ل D ويمر من $A(0,1,1)$ إذن Δ و D لهما نفس المتجهة الموجهة $\vec{u}(2,3,0)$.

2) ليكن P مستوى مار من $B(1,0,3)$ و Δ عمودي عليه

إذن فالمتجهة $\vec{u}(2,3,0)$ ستكون منظمية على P ومنه فإن معادلة ديكارتية له ستكون كما يلي: $2x+3y+d=0$

وبما أن $B(1,0,3)$ نقطة من P فإن: $2+d=0$ يعني $d=-2$ وبالتالي تصبح المعادلة: $2x+3y-2=0$

3) ليكن P' المستوى ذو المعادلة الديكارتية: $-x+\frac{2}{3}y-5z+1=0$

لنبين أن $P\perp P'$: لدينا $\vec{u}'(-1,\frac{2}{3},-5)$ منظمية على P'

لدينا: $\vec{u}\cdot\vec{u}'=-2+2=0$ **إذن** $\vec{u}\perp\vec{u}'$ **ومنه** $P\perp P'$

تمرين4:

نعتبر P المستوى ذو المعادلة الديكارتية: $x-y+z=0$

1) Δ مستقيم مار من $A(-1,0,2)$ وعمودي على P إذن Δ سيكون موجها بالمتجهة المنظمية ل P والتي هي: $\vec{n}(1,-1,1)$

إذن التمثيل البارمتري للمستقيم Δ سيكون على شكل: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=2+t \end{cases} \quad , t\in IR$

2) تحديد تقاطع P و Δ

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من $P\bigcap\Delta$ إذن يوجد عدد حقيقي t حيث: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=2+t \end{cases}$ و $x-y+z=0$

إذن $-1+t+t+2+t=0 \Rightarrow 3t=-1 \Rightarrow t=\dfrac{-1}{3}$ ومنه $\begin{cases} x=\dfrac{-4}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ إذن Δ يقطع P في النقطة $B(\dfrac{-4}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3})$

3) ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على P بما أن Δ عمودي على P إذن $H=B$

تمرين5: نعتبر النقطة $A(2,-1,0)$ والمستوى $(P):2x-y+z=0$

1) حساب $d(A,P)$:

لدينا $d(A,P)=\dfrac{|2x_A-y_A+z_A|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}}$

2) لنحدد إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة A على P :

لدينا $\vec{n}(2,-1,1)$ منظمية على P إذن $\vec{n}$ و $\overline{AH}$ متخاطتان إذن يوجد عدد حقيقي α حيث $\overline{AH}=\alpha\vec{n}$

ومنه $\begin{cases} x_H-2=2\alpha \\ y_H+1=-\alpha \\ z_H=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H=2\alpha+2 \\ y_H=-\alpha-1 \\ z_H=\alpha \end{cases}$ وبما أن $H\in P$ فإن $2(2\alpha+2)+\alpha+1+\alpha=0 \Leftrightarrow 6\alpha+5=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{-5}{6}$

إذن $\begin{cases} x_H=2\dfrac{-5}{6}+2=\dfrac{1}{3} \\ y_H=\dfrac{5}{6}-1=\dfrac{-1}{6} \\ z_H=\dfrac{-5}{6} \end{cases}$

3) لنحدد معادلة ديكارتية للمستوى Q المار من $A(2,-1,0)$ والموازي للمستوى P

بما أن $P//Q$ فإن $\vec{n}(2,-1,1)$ ستكون منظمية على Q ومنه معادلة Q ستكون كما يلي: $2x-y+z+d=0$

و حيث أن $A\in Q$ إذن $4+1+d=0 \Leftrightarrow d=-5$ فتصبح معادلة Q هي: $2x-y+z-5=0$

تمرين6: نعتبر المستويين: $(P): x-2y+z-1=0$ و $(P'): x+y-3z=0$ والنقطة $A(1,-1,0)$

1) حساب $d(A,P)$ و $d(A,P')$

لدينا: $d(A,P)=\frac{|1+2-1-1|}{\sqrt{1+4+1}}=0$ و $d(A,P')=\frac{|1-1|}{\sqrt{1+1+9}}=0$ إذن $A\in P\cap P'$

2) لنحدد تمثيلا بارمتريا للمستقيم Δ تقاطع P و P':

لدينا $\overline{n}(1,-2,1)$ منظمية على P و $\overline{n}'(1,1,-3)$ منظمية على P' نضع $\overline{w}=\overline{n}\wedge\overline{n}'$

لدينا $\overline{w}=\overline{n}\wedge\overline{n}'=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\overline{i}+\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\overline{k}=5\overline{i}+4\overline{j}+3\overline{k}$

$\overline{w}$ ستكون متجهة موجهة للمستقيم Δ إذن تمثيل بارمتري سيكون : $\begin{cases}x=1+5t\\ y=-1+4t\\ z=3t\end{cases}$ $,t\in IR$ لأن $A(1,-1,0)\in\Delta$

3) (D) مستقيم مار من A وموازي للمستويين P و P'

بما أن $A\in P\cap P'$ فإن (D) سيكون هو Δ

لنحدد معادلتين ديكارتيتين ل Δ:

لدينا:
$$\begin{cases}x=1+5t\\ y=-1+4t\\ z=3t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{5}=t\\ \frac{y+1}{4}=t\\ \frac{z}{3}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{4}\\ \frac{y+1}{4}=\frac{z}{3}\end{cases}$$

4) (Q) مستوى مار من A وعمودي على المستويين P و P' إذن $\overline{w}$ ستكون منظمية عليه

ومنه معادلة ديكارتية ل (Q) هي كما يلي: $5x+4y+3z+d=0$ و بما أن (Q) يمر من A فإن $5-4+d=0$

إذن $d=-1$ وبالتالي تصبح المعادلة: $5x+4y+3z-1=0$