ثانوية الفتح نيابة الخميسات	التعداد Dénombrement	الثانية علوم تجريبية Prof : BENELKHATIR

I- المجموعات:

1)- تقاطع و إتحاد مجموعتين:

لتكن E مجموعة غير فارغة و A و B جزئين من E

-- تقاطع A و B هي المجموعة المكونة من العناصر المشتركة بينهما و يرمز لها ب $A \cap B$.

-- إذا كان $A \cap B$ فارغا نكتب $A \cap B = \varnothing$ ونقول إن A و B جزئين منفصلين .

-- إتحاد A و B هي المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A أو B ويرمز لها ب $A \cup B$.

-- نسمي متممة A في E المجموعة المكونة من جميع عناصر E التي لا تنتمي إلى A ، ويرمز لها ب $\overline{A}$.

-- **أمثلة:**

لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية و B مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الفردية .

لدينا $A \cap B = \varnothing$ ، إذن A و B جزئين منفصلين

و بما أن $A \cup B = \mathbb{N}$ فإن متممة A في $\mathbb{N}$ هي B

إذن $\overline{A} = B$ و لدينا أيضا $\overline{B} = A$.

2)- المجموعات المنتهية:

-- **تعريف:**

نقول إن مجموعة غير فارغة E منتهية رئيسيها n حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و نكتب $card\,(E) = n$ إذا كانت E تتضمن n عنصرا .

-- **مثال:**

لدينا ، $card\,(\{-4,-2,0,3,7,10\}) = 6$.

■ **خاصية01:**

إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين فإن $A \cup B$ مجموعة منتهية و لدينا :

$$card\,(A \cup B) = card\,(A) + card\,(B) - card\,(A \cap B)$$

وبصفة خاصة ، إذا كانت A و B مجموعتين منفصلتين فإن : $card\,(A \cup B) = card\,(A) + card\,(B)$

■ **خاصية02:**

إذا كانت E مجموعة منتهية و A مجموعة جزئية من E فإن : $card\,(\overline{A}) = card\,(E) - card\,(A)$.

■ **تمرين01:**

إستجوب مجموعة من التلاميذ ، 25 منهم صرحوا أنهم يتكلمون الفرنسية و 17 منهم صرحوا أنهم يتكلمون الأنجليزية و 10 يتكلمون اللغتين معا ، كم هو عدد التلاميذ الذين تم إستجوابهم ؟؟

■ **تمرين02:**

يحتوي صندوق على 4 كرات تحمل الأرقام 2 و4 و7 و9 ، نسحب عشوائيا كرة أولى من الصندوق نسجل رقمها ثم نعيدها لإجراء سحبة ثانية ، نكون بهذه الطريقة أعدادا من رقمين .

أ- كم عددا يمكن تكوينه ؟؟

ب- كم عددا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه؟؟؟

ج- كم عددا فرديا يمكن تكوينه ؟؟؟؟

3)- الجداء الديكارتي لمجموعتين:

-- **تقديم:** نعتبر المجموعتين ،

$$E = \{2,3,4\} \quad \text{و} \quad F = \{0,1\}$$

المجموعة :

$$\{(2,0);(2,1);(3,0);(3,1);(4,0);(4,1)\}$$

تسمى الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F و يرمز لها بالرمز $E \times F$.

-- أكتب بالتفصيل الجداءات الديكارتية $F \times E$ و $E \times E$ و $F \times F$.

-- أكتب بالتفصيل الجداءين الديكارتين : F^3 و E^3 .

-- **خاصية03:**

إذا كانت E و F مجموعتين منتهيتين رئيسيهما على التوالي n و m فإن $card\,(E \times F) = n \times m$.

إذن $card\,(E^2) = n^2$ و $card\,(E^3) = n^3$

وبصفة عامة $card\,(E^p) = n^p$.

-- **تمرين03:**

نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية ، عند كل رمية يمكن للقطعة أن تستقر على الوجه F (face) أو الظهر P (pile) .

أ- كم هو عدد النتائج الممكنة ؟؟

ب- حدد بالتفصيل جميع هذه النتائج .

II- المبدأ الأساسي للتعداد:

1)- مبدأ الجداء:

إذا أجرينا تجربة عشوائية ما و افترضنا أن لدينا p إختبارا بحيث : الإختبار الأول يتم ب n_1 كيفية و الثاني ب n_2 كيفية . . . و الإخبار الأخير p ب n_p كيفية ، فعدد الكيفيات التي تتم بها هذه الإختبارات هي :

$N = n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$.

بعبارة أخرى: إذا قمنا بتجربة عشوائية ما على p مرحلة و كانت كل مرحلة تتم على التوالي ب n_1 و n_2 و . . . و n_p طريقة ممكنة ، فعدد الطرق الممكنة إجمالا هي :

$N = n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$.

-- مثال:

تتكون شبكة من $3 \times 7 = 21$ مربعا ، نلون باللون الأسود ثلاث مربعات .

أ- كم هو عدد الطرق الممكنة ؟؟

ب- كم هوعدد الطرق الممكنة التي تكون فيها المربعات السوداء في نفس الخط الأفقي ؟؟؟

ج- نلون هذه المرة ثلاث مربعات بثلاث ألوان مختلفة : الأحمر ، الأزرق و الأخضر . كم هو عدد الطرق الممكنة ؟؟؟

-- تمرين04:

1)- كم عددا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه ؟

2)- كم عددا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه ؟؟

3)- كم عددا فرديا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه ؟؟؟

4)- كم عددا من ثلاثة أرقام يقبل القسمة على 5 يمكن تكوينه ؟؟؟؟

III- الترتيبات و التبديلات:

1)- الترتيبات:

-- تعريف01: لتكن E مجموعة منتهية رئيسيها n حيث $n \geq 1$ و p عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

كل عنصر $(x_1, x_2, ..., x_p)$ من E^p يسمى ترتيبة بتكرار ل p عنصر من E .

-- خاصية04:

عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر لمجموعة منتهية رئيسيها n هو n^p .

-- مثال: نريد تكوين أرقام هاتفية للمحمول من تسعة أرقام .

كم هو عدد الأرقام الممكنة التي تبدأ بالرقمين 06 ؟؟

-- تعريف02: لتكن E مجموعة منتهية رئيسيها n و p عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث: $1 \leq p \leq n$

كل عنصر $(x_1, x_2, ..., x_p)$ من E^p بحيث x_1 و x_2 و . . . و x_p مختلفة مثنى مثنى يسمى ترتيبة بدون تكرار ل p عنصر من E .

-- خاصية05:

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر لمجموعة منتهية رئيسيها n حيث $1 \leq p \leq n$ هو :

$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... (n-p+1)$.

-- تمرين05:

أ- بكم من طريقة يمكن أن توزع 5 سيارات على سبع أماكن فارغة في موقف للسيارات ؟؟؟

ب- بكم من طريقة يمكن أن نرتب خمس كتب في خمس قمطرات بحيث كل قمطر لا يتسع لأكثر من كتاب ؟؟

2)- سحب عدة كرات بالتتابع:

-- تقديم:

يحتوي كيس على خمس كرات مرقمة من 1 إلى 5 ، لسحب كرتين بالتتابع من الكيس هناك طريقتين :

- سحب بإحلال:

نسحب كرة أولى نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس و نجري سحبة ثانية ، كل سحبة ممكنة في هذه الحالة عبارة عن ترتيبة بتكرار لعنصرين من بين خمسة ، عددها إذن هو : $5^2 = 25$.

- سحب بدون إحلال:

نسحب كرة أولى ثم كرة ثانية دون إرجاع الأولى إلى الكيس ، كل سحبة ممكنة عبارة عن ترتيبة بدون تكرار لعنصرين من بين خمسة و عددها هو:

$A_5^2 = 5 \times 4 = 20$.

-- **تمرين06:**

يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 ، نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الكيس بالتتابع و بدون إحلال .

أ- كم هو عدد السحبات الممكنة ؟؟

ب- كم هو عدد السحبات التي تحتوي على الكرة رقم 2 ؟

ج- كم هو عدد السحبات التي تحمل فيها الكرة الثالثة رقما فرديا ؟؟؟

د- كم هو عدد السحبات التي تحمل فيها الكرات الثلاث أرقاما لها نفس الزوجية ؟؟

3)- التبديلات:

-- **تعريف:**

لتكن E مجموعة منتهية رئيسيها n ، كل ترتيبة لجميع عناصر E تسمى تبديلة ل E .

-- **خاصية06:**

عدد تبديلات مجموعة منتهية رئيسيها n هو :

$$A_n^n = n\times(n-1)\times....\times 2\times 1$$

يرمز للعدد A_n^n بالرمز $n!$ و يقرأ عاملي n ، إذن :

$$n! = n\times(n-1)\times....\times 2\times 1 \; .$$

-- **ملحوظة:**

بالنسبة ل 0 إصطلاحا نضع : $0!=1$ (متفق عليه)

-- **خاصية07:**

لكل n و p من $\mathbb{N}^*$ بحيث $1\le p\le n$ لدينا :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)} \; .$$

-- **تمرين07:**

أ- حل في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلة :

$$(E): 4A_n^2 + 36A_n^3 = 9n$$

ب- بكم من طريقة يمكن أن يجلس 10 أشخاص حول مائدة مستديرة ؟؟

ج- بكم من طريقة يمكن أن يجلس 10 أشخاص من بينهم 5 رجال و 5 نساء حول مائدة مستديرة علما أنه لا يمكن لشخصين من نفس الجنس أن يجلسا جنبا إلى جنب ؟؟

IV- التأليفات:

-- **تعريف:**

لتكن E مجموعة منتهية رئيسيها n و n و $1\le p\le n$

كل جزء $\{x_1,x_2,...,x_p\}$ من p عنصر من E يسمى تأليفة ل p عنصر من E .

-- **خاصية07:**

عدد التأليفات ل p عنصر لمجموعة منتهية رئيسيها n

هو : $$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)\times p!}$$

-- **خاصية08:** لكل (n,p) من $\mathbb{N}^2$ بحيث $1\le p\le n$ ،

لدينا : $C_n^{n-p} = C_n^p$ و $C_n^p = \frac{n}{p}\times C_{n-1}^{p-1}$.

-- **تمرين08:**

يحتوي صندوق على كرتين تحملان الرقم 2 و ثلاث كرات تحمل الرقم 3 و أربع كرات تحمل الرقم 4 ، نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

أ- كم هو عدد السحبات الممكنة ؟؟؟

ب- كم هو عدد السحبات التي تحتوي على ثلاث كرات تحمل نفس الرقم ؟؟؟

ج- كم هو عدد السحبات التي تحتوي على ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى ؟؟؟

د- كم هو عدد السحبات التي تحتوي على ثلاث كرات مجموع أرقامها 10 ؟؟؟

-- **تمرين09:**

أ- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\ge 2$ لدينا :

$$C_n^2 = 1+2+3+....+(n-1)$$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلات التالية :

$$(1): C_n^2 + 6\times C_n^3 = 9n$$

و $$(2): C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2}$$

$$(3): C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$$

ج- حدد نهاية المتتالية $(x_n)_{n\ge 1}$ حيث :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* : x_n = \frac{C_n^1\times C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$$

V- مثلث باسكال و صيغة حدانية نيوتن:

1)- مثلث باسكال:

-- صيغة باسكال:

-- تمرين10:

يحتوي صندوق على n كرة حيث $n \geq 2$: $n-1$ كرة بيضاء و كرة واحدة سوداء ، نسحب في آن واحد p كرة من الصندوق حيث $1 \leq p \leq n-1$.

أ- حدد N عدد السحبات الممكنة .

ب- حدد N_1 عدد السحبات التي تحتوي على الكرة السوداء .

ج- حدد N_2 عدد السحبات التي لا تحتوي على الكرة السوداء . ماذا تستنتج ؟؟؟

-- خاصية09:

لكل (n,p) من $\mathbb{N}^2$ بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq p \leq n-1$

لدينا ، $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$.

-- ملحوظة:

تسمى هذه العلاقة بصيغة باسكال ، و تمكننا من حساب الأعداد C_n^p بالترجع إنطلاقا من العددين C_{n-1}^{p-1} و C_{n-1}^{p} .

نعبر عن ذلك في جدول يسمى مثلث باسكال :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

2)- صيغة الحدانية: لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ لدينا ،

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

و $$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

في المتطابقتين الأولى و الثانية تظهر على التوالي معاملات السطر الثالث و الرابع من مثلث باسكال ، إذن :

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

بصفة عامة يمكننا أن نبرهن بالترجع أن :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

تسمى هذه المتطابقة بصيغة الحدانية .

-- خاصية10:

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ و لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$ لدينا

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

و $$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

و بصفة خاصة :

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \quad \text{و} \quad (1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^k$$

و إذا أخذنا $a=1$ نحصل على ، $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

و $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

-- خاصية11:

إذا كانت E مجموعة منتهية رئيسيها n فعدد أجزاء المجموعة E هو 2^n .

-- تمرين11:

1)- في نشر $(a+b)^{26}$ ما هو معامل $a^{24}b^2$ ؟؟؟

2)- ما هو معامل $a^6 b^7$ في نشر $(2a+b)^{13}$ ؟؟؟

-- تمرين12:

يحتوي كيس U_1 على كرتين بيضاوين و ثلاث كرات خضراء و خمس كرات حمراء و يحتوي كيس U_2 على أربع كرات خضراء .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس U_1

نضعها في الكيس U_2 ثم نسحب تآنيا ثلاث كرات من U_2 .

1)- كم هو عدد السحبات الممكنة ؟؟

2)- كم هو عدد السحبات التي تحتوي على ثلاث كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى ؟؟؟

3)- كم هو عدد السحبات التي تحتوي على كرة واحدة بيضاء بالضبط ؟؟؟؟

-- تمرين13:

تتكون إحدى الجمعيات من 20 عضوا .

1)- كم لجنة من أربعة أشخاص يمكن تكوينه ؟؟؟

2)- إذا علمت أن الجمعية تتكون من 12 رجلا و 8 نساء ، فكم هو عدد اللجنات المكونة من رجلين و إمرأتين ؟؟

-- تمرين14:

نريد تكوين أرقام للهاتف المحمول من تسعة أرقام من بين عناصر المجموعة $E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

1)- إذا علمت أن جميع الأرقام تبدأ بالرقمين 06 ، فكم هو عدد الأرقام الممكنة ؟

2)- كم رقما (يبدأ بالرقمين 06) مكون من 1 مرتين و 2 مرتين و 9 ثلاث مرات ؟

3)- كم رقما (يبدأ بالرقمين 06) يحتوي على 2 ثلاث مرات بالضبط ؟؟؟؟

4)- كم رقما (يبدأ بالرقمين 06) مكون من رقمين مختلفين ؟؟؟؟