I- الدالة الأسية النبيرية:

1)- تعريف و نتائج:

دالة اللوغاريتم النبيري $\ln$ تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$، إذن فهي تقبل تقابلا عكسيا من $\mathbb{R}$ نحو $]0,+\infty[$

-- **تعريف:** الدالة الأسية النبيرية هي التقابل العكسي لدالة اللوغاريتم النبيري $\ln$، و يرمز لها بالرمز $\exp$.

إذن : $$\exp:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to]0,+\infty[\\ x\mapsto y\,/\ln y=x\end{array}\right.$$

- **نتائج:**

-- لدينا : $$\begin{cases}\ln 1=0\Leftrightarrow \exp 0=1\\ \ln e=1\Leftrightarrow \exp 1=e\end{cases}$$

و $\forall r\in\mathbb{Q}:\ln\left(e^{r}\right)=r\Leftrightarrow \exp r=e^{r}$.

و بصفة عامة:

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ln(\exp x)=x$$

و $\forall x\in]0,+\infty[:\exp(\ln x)=x$.

إذن :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{2}:\begin{cases}\exp x=\exp y\Leftrightarrow x=y\\ \exp x\prec \exp y\Leftrightarrow x\prec y\end{cases}$$

-- الدالة $\exp$ متصلة و لها نفس منحى تغيرات الدالة $\ln$ إذن، فهي تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$، ولدينا :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\exp x=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp x=+\infty$.

-- في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ منحنى الدالة $\exp$ هو مماثل منحنى الدالة $\ln$ بالنسبة للمنصف الأول .

2)- خاصيات:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{2}:\begin{cases}\exp(x+y)=\exp x\times\exp y\\ \exp(x-y)=\dfrac{\exp x}{\exp y}\\ \exp(-x)=\dfrac{1}{\exp x}\end{cases}$$

و $\forall(x,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Q}:\exp(r.x)=(\exp x)^{r}$.

-- **الترميز** e^{x} :

نعلم أن $\exp r=e^{r}$ لكل r من $\mathbb{Q}$، نمدد هذه الكتابة إلى المجموعة $\mathbb{R}$، فنضع : $\forall x\in\mathbb{R}:\exp x=e^{x}$

العلاقات السابقة تصبح إذن على الشكل التالي :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[:y=e^{x}\Leftrightarrow \ln y=x$$

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{2}:\begin{cases}e^{x}=e^{y}\Leftrightarrow x=y\\ e^{x}\prec e^{y}\Leftrightarrow x\prec y\end{cases}$$

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{2}:\ e^{x+y}=e^{x}\times e^{y}$ و $e^{x-y}=\dfrac{e^{x}}{e^{y}}$

$$\forall(x,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Q}:\mathrm{e}^{r.x}=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{r}$$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ln\left(e^{x}\right)=x$ و $\forall x\in]0,+\infty[:e^{\ln x}=x$

و أخيرا، $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

3)- مشتقة الدالة الأسية النبيرية:

الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

إذن مشتقتها لا تنعدم في كل نقطة من $]0,+\infty[$، وبالتالي فالدالة $\exp$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}:(\exp x)'=\frac{1}{\ln'(\exp x)}=\exp x$$

-- **خاصية02:**

الدالة $\exp:x\mapsto e^{x}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$\forall x\in\mathbb{R}:\left(e^{x}\right)'=e^{x}$.

و بصفة عامة: إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I، فإن الدالة : $x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للإشتقاق على I و لدينا: $\forall x\in I:\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$.

4)- نهايات مرجعية:

-- **تمرين01:** حدد النهايات التالية ،

$(1)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}$ ، $(2)\ \lim\limits_{x\to-\infty}x.e^{x}$ ، $(3)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$

$(4):\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}$ و $(5):\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}.e^{x}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

-- **تمرين02:** حدد النهايات التالية :

$(1): \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x.e^x$ و $(2): \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-x}{2.e^x+1}$

$(3): \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x}{e^x+e^{-x}}$ و $(4): \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+e^x}{x.e^x}$

$(5): \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$ و $(6): \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x+x^2}$

$(7): \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+x\right).e^{x-x^2}$ و $(8): \lim\limits_{x\to2} \dfrac{e^{x^2}-e^4}{x^2-4}$

$(9): \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x}+x^3$ و $(10): \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}.\ln x$

$(11): \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\left(2x^2+x\right)$

$(12): \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{px}-e^{qx}}{x} / (p,q)\in\mathbb{R}^2; p\neq q$.

II- تطبيقات:

-- **تمرين03:** نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=2x+1+\frac{e^x}{e^x-1} .$$

1)- حدد D_f ، ثم أحسب النهايتين:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)- أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما .

3)- بين أن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ مقاربين مائلين (Δ_1) و (Δ_2) على التوالي و اعط معادلتهما .

4)- بين أن f قابلة للإشتقاق على D_f و إن :

$$\forall x\in D_f : f'(x)=\frac{2e^{-2x}-5e^{-x}+2}{\left(1-e^{-x}\right)^2} .$$

5)- حل في D_f المتراجحة : $2e^{-2x}-5e^{-x}+2\geq0$.

6)- أنشيء جدول تغيرات الدالة f على D_f .

7)- أرسم المقاربين (Δ_1) و (Δ_2) و المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

III- الدالة الأسية للأساس a ، $a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$:

الدالة $\log_a$ تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ لأنها متصلة و رتيبة قطعا على $]0,+\infty[$ و $\log_a(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

1)- تعريف:

التقابل العكسي للتقابل $\log_a$ يسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز له بالرمز $\exp_a$ ، إذن :

$$\exp_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to]0,+\infty[\\ x\mapsto y / \log_a y=x \end{array}\right.$$

■ ملحوظة:

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[:$

$\exp_a x=y \Leftrightarrow \log_a y=x \Leftrightarrow \ln y=x\ln a$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}:\exp_a x=e^{x\ln a}$.

$\forall r\in\mathbb{Q}:\log_a\left(a^r\right)=r$

إذن : $\forall r\in\mathbb{Q}:\exp_a r=a^r$

نمدد هذه الكتابة إلى المجموعة $\mathbb{R}$ فيصبح لدينا ،

$\forall x\in\mathbb{R}:\exp_a x=a^x$

2)- خاصيات:

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و $\forall(a,b)\in\mathbb{R}_+^{*2}$ / $a\neq1$ و $b\neq1$:

$$\begin{cases} a^{x+y}=a^x\times a^y \\ a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \left(a^x\right)^y=a^{x.y} \\ a^{-x}=\dfrac{1}{a^x} \end{cases}$$

$(ab)^x=a^x.b^x$ و $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.

3)- دراسة الدالة: $\exp_a : x\mapsto a^x$ ، $a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$

-- **النهايات:** هناك حالتين ،

$$0\prec a\prec1\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0 \end{cases}$$

و

$$a\succ1\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty \end{cases}$$

-- **المشتقة:**

الدالة : $\exp_a : x \mapsto a^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$\forall x \in \mathbb{R}:$

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x.\ln a}\right)' = \left(\ln a\right).e^{x.\ln a} = \left(\ln a\right).a^x$$

و بالتالي ، إذا كان $0 \prec a \prec 1$ فإن الدالة $\exp_a$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

و إذا كان $a \succ 1$ فإن الدالة $\exp_a$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

-- **التمثيل المبياني:**

4)- تطبيقات:

-- **تمرين01:** حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلتين :

$$(1): e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$$

و $$(2): 3^{x+2} + 9^{x-1} - 1458 = 0$$

-- **تمرين02:**

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f\left(x\right) = x^{\frac{1}{x}}$$

أ)- حدد النهايتين $\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ و $\lim_{x \to 0^+} f\left(x\right)$ ، ثم أول النتيجتين المحصل عليهما .

ب)- حدد f' ، ثم أدرس إشارتها و استنتج جدول تغيرات الدالة f .

-- **تمرين03:** لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f\left(x\right) = \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right) .$$

1)- حدد D_f ، ثم أحسب نهايتي f عند محديه .

2)- أ- بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا $\left(\Delta\right)$ و حدد معادلته .

ب- حدد وضع $\left(C_f\right)$ بالنسبة لمقاربه $\left(\Delta\right)$.

3)- حدد f' ، ثم أدرس إشارتها و استنتج جدول تغيرات الدالة f .

4)- أرسم المقارب $\left(\Delta\right)$ والمنحنى $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

■ **تمرين04:**

-- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 2x\left|\ln\left(\frac{e}{x}\right)\right| ; x \succ 0 \\ e^x - 1 - 2\sqrt{1-e^x} ; x \leq 0 \end{cases} .$$

و ليكن $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة f في م م م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث

$$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$$

1)- أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to -\infty} f\left(x\right) \text{ و } \lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) \text{ و } \lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(x\right)}{x}$$

ثم حدد طبيعة الفروع اللا نهائية ل $\left(C_f\right)$.

2)- أ- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f عند $x_0 = 0$ ، و اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها .

ب- أدرس قابلية إشتقاق f عند $x_0 = e$ ، و اعط تأويلا هندسيا للنتجتين المحصل عليهما .

3)- أ- بين أن :

$$\begin{cases} \forall x \in]0,e[: f'\left(x\right) = -2\ln x \\ \forall x \in]e,+\infty[: f'\left(x\right) = 2\ln x \end{cases}$$

و $$\forall x \in]-\infty,0[: f'\left(x\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)e^x$$

ب- أدرس إشارة المشتقة f' ثم أنشيء جدول تغيرات f.

4)- أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5)- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty,0]$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب- حدد $g^{-1}\left(x\right)$ لكل x من J .

■ **تمرين05:**

1)- مثل مبيان الدالة : $f : x \mapsto x + \ln\left(1+x^2\right)$ ، (أدرس التحذب و التقعر و حدد نقط الإنعطاف) .

2)- نعتبر الدالة : $g : x \mapsto \left(1+x^2\right)e^x$ ، حدد علاقة بين $f\left(x\right)$ و $g\left(x\right)$ ، ثم إستنتج تغيرات الدالة g .