تمارين حول الدوال اللوغاريتمية sajid mohammed

التمرين 1)

• $\ln(4x-1)=0$

- لتكن D مجموعة تعريف المعادلة :

$$D=\{x\in\mathbb{R}/4x-1\succ 0\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ\frac{1}{4}\right\}$$
$$=\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$$

- لكل x من $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ ، $\ln(4x-1)=0 \Leftrightarrow 4x-1=1$

أي $x=\frac{1}{2}$ وبما أن $\frac{1}{2}\in\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ فإن $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

• $\ln(x^2)=\ln(2x-1)$

- لتكن D مجموعة تعريف المعادلة :

$$D=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\succ 0\}\cap\{x\in\mathbb{R}/x^2\succ 0\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ\frac{1}{2}\right\}\cap\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}$$
$$=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

- لكل x من $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $\ln(x^2)=\ln(2x-1)\Leftrightarrow x^2=2x-1$

أي $(x-1)^2=0$ أي $x=1$ وبما أن $1\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ فإن $S=\{1\}$

• $\ln(2x-\sqrt{3})=\ln(\sqrt{2-\sqrt{3}})+\ln(\sqrt{2+\sqrt{3}})$

- لتكن D مجموعة تعريف المعادلة :

$$D=\{x\in\mathbb{R}/2x-\sqrt{3}\succ 0\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$=\left]\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$$

- لكل x من $\left]\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$ ،

$$\ln(2x-\sqrt{3})=\ln(\sqrt{2-\sqrt{3}})+\ln(\sqrt{2+\sqrt{3}})\Leftrightarrow \ln(2x-\sqrt{3})=\ln\left[(\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2+\sqrt{3}})\right]$$

أي $2x-\sqrt{3}=(\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2+\sqrt{3}})=1$ مما يؤدي إلى $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ وبما أن

$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\in\left]\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$ فا فإن $S=\left\{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}$

• $2\ln(x-1)=-\ln(\dfrac{1}{x})+2$

- لتكن D مجموعة تعريف المعادلة :

$$\begin{aligned}D&=\{x\in\mathbb{R}/x-1\succ 0\}\bigcap\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\}\\&=\{x\in\mathbb{R}/x\succ 1\}\bigcap\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\}\\&=]1;+\infty]\end{aligned}$$

- لكل x من $]1;+\infty]$ ،

$$\begin{aligned}2\ln(x-1)=-\ln(\frac{1}{x})+2&\Leftrightarrow \ln(x-1)^2=\ln(x)+\ln e^2\\&\Leftrightarrow \ln(x-1)^2=\ln(xe^2)\\&\Leftrightarrow (x-1)^2=(xe^2)\\&\Leftrightarrow x^2-(2+e^2)x+1=0\\&\Leftrightarrow x^2-(2+e^2)x+1=0\end{aligned}$$

إذن $x=\dfrac{2+e^2+e\sqrt{4+e^2}}{2}$ أي $S=\left\{\dfrac{2+e^2+e\sqrt{4+e^2}}{2}\right\}$

• $\ln(\dfrac{1}{x-1})+\ln(x)=1$

- لتكن D مجموعة تعريف المعادلة :

$$\begin{aligned}D&=\{x\in\mathbb{R}/x-1\succ 0\}\bigcap\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\}\\&=\{x\in\mathbb{R}/x\succ 1\}\bigcap\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\}\\&=]1;+\infty]\end{aligned}$$

- لكل x من $]1;+\infty]$ ، $\ln(\dfrac{1}{x-1})+\ln(x)=1\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\ln e$

أي $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=e$ مما يؤدي إلى $x=\dfrac{e}{e-1}$ وبما أن $\dfrac{e}{e-1}\in]1;+\infty]$ فإن $S=\left\{\dfrac{e}{e-1}\right\}$

• $\ln^2(x)+\ln(x)-6=0$

- لتكن D مجموعة تعريف المعادلة : $D=\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\}$
$=]0;+\infty[$

لكل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln^2(x)+\ln(x)-6=0 \Leftrightarrow (\ln x-2)(\ln x+3)=0$ و منه فإن $\ln x=2$ أو $\ln x=-3$ تكافئ $\ln x=\ln e^2$ أو $\ln x=\ln\frac{1}{e^3}$ تكافئ $x=e^2$ أو $x=\frac{1}{e^3}$ وبما أن العددين موجبين قطعا فإن $S=\left\{e^2;\frac{1}{e^3}\right\}$

• $\ln^2(x-1)-\frac{5}{2}\ln(x-1)^2+4=0$

- لتكن D مجموعة تعريف المعادلة :
$$\begin{aligned}D&=\{x\in\mathbb{R}/x-1\succ 0\}\\&=\{x\in\mathbb{R}/x\succ 1\}\\&=]1;+\infty[\end{aligned}$$

لكل x من $]1;+\infty[$ ،

$$\begin{aligned}\ln^2(x-1)-\frac{5}{2}\ln(x-1)^2+4=0&\Leftrightarrow \ln^2(x-1)-5\ln(x-1)+4=0\\&\Leftrightarrow (\ln(x-1)-4)(\ln(x-1)-1)=0\end{aligned}$$

و منه فإن $\ln(x-1)=4$ أو $\ln(x-1)=1$ تكافئ $\ln(x-1)=\ln e^4$ أو $\ln(x-1)=\ln e$ تكافئ $x=e^4+1$ أو $x=e+1$ وبما أن العددين أكبر قطعا من 1 فإن $S=\{e+1;e^4+1\}$