التمرين الأول

احسب التكاملات التالية :

$$\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-1)dx \quad \int_{1}^{2}\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx \quad \int_{1}^{e}\frac{\ln t}{t}dt \quad \int_{1}^{2}2e^{3x}dx \quad \int_{0}^{3}\frac{5}{\sqrt{2x+3}}dx \quad \int_{1}^{2}(x+1)\ln x\,dx$$

$$\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}dx \quad \int_{-2}^{0}(2x^3-x+1)dx \quad \int_{1}^{2}\frac{2}{(3u-1)^2}du \quad \int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}dx \quad \int_{0}^{2}3e^{2x}dx$$

$$\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx \quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\, e^{\sin x}dx \quad \int_{1}^{e}\frac{\ln 2t}{t^2}dt \quad \int_{1}^{2}x^2\ln x\,dx \;.$$

التمرين الثاني

لكل عدد حقيقي موجب قطعا a ، نعرف : $I(a)=\int_{1}^{a}\frac{\ln x}{x^2}dx$

1) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $I(a)=\frac{\ln(a)-1}{a}+1$

2) استنتج نهاية $I(a)$ عندما تؤول a إلى $+\infty$

3) نعرف الآن $J(a)=\int_{1}^{a}\frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$ ، بين مستعملا لكل x أكبر من 1 ($x^2\leq x^2+1\leq 2x^2$) أن
$\frac{1}{2}I(a)\leq J(a)\leq I(a)$

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

1) أثبت أن f قابلة للإشتقاق على $[1,+\infty[$ ثم احسب $f'(x)$ لكل x من $[1,+\infty[$

2) استنتج قيمة التكامل $K=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

التمرين الرابع

نعتبر متتالية التكاملات التالية : $I_0=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+e^x}$ ، $I_1=\int_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^x}dx$ ، .... ، $I_n=\int_{0}^{1}\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ حيث

n عدد صحيح طبيعي .

1) احسب I_1 و I_0+I_1 ثم استنتج I_0 . احسب I_n+I_{n+1} لكل n من $\mathbb{N}$.

2) أثبت بدون حساب أن (I_n) متتالية تزايدية .

3) أثبت أن لكل x من $[0;1]$ ، $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$ ثم استنتج تأطيرا ل I_n . هل I_n متقاربة ؟

التمرين الخامس

نريد حساب التكاملات التالية :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \; ; \quad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \; ; \quad \mathrm{K} = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx.$$

1) نعتبر الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;1]$ ب : $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2}).$ احسب مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2+2}.$ ثم استنتج f' مشتقة الدالة f .

2) احسب I .

3) دون حساب التكاملات J و K تأكد أن $J+2I=K$

4) باستعمال مكاملة بالأجزاء للتكامل K بين أن $\mathrm{K}=\sqrt{3}-\mathrm{J}.$ ثم استنتج قيم J و K