

**التمرين الخامس**

(1) الدالة  $x \mapsto x^2 + 2$  موجبة قطعاً و قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  إذن الدالة  $g: x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \end{aligned}$$

لكل  $x$  من  $[0;1]$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 2} + x}{\sqrt{x^2 + 2} (x + \sqrt{x^2 + 2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} \\ &= \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) \right]_0^1 \\ &= \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}) \\ &= \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} J+2I &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx + 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} \\ &= \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(\sqrt{x^2 + 2})^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx. \\ &= K \end{aligned}$$

مكاملة بالأجزاء للتكامل K

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$v(x) = x$$

$$u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad \text{نضع :}$$

$$v'(x) = 1$$

إذن :

$$K = \left[ x\sqrt{x^2 + 2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$= \sqrt{3} - J$$

من العلاقتين  $K = \sqrt{3} - J$  و  $J + 2I = K$  نحصل على  $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I$  و  $K = \frac{\sqrt{3}}{2} + I$