التمرين الاول

أ-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}$$
$$=+\infty$$

ب- بما أن الدالة $x\mapsto x^2-2x$ موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ فإن الدالة $f:x\mapsto\sqrt{x^2-2x}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ و

$$\forall x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[: f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

إشارة الدالة f' على $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ هي إشارة الدالة $x\mapsto x-1$

<u>قابلية الاشتقاق على يمين 2 و على يسار 0</u>

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$
$$=-\infty$$

<u>التأويل الهندسي :</u> منحنى الدالة f يقبل نصف مماس في النقطة $(0;0)$ موازي لمحور الأراتيب و موجه نحو الاراتيب الموجبة .

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$$
$$=+\infty$$

<u>التأويل الهندسي :</u> منحنى الدالة f يقبل نصف مماس في النقطة $(2;0)$ موازي لمحور الأراتيب و موجه نحو الاراتيب الموجبة .

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||		||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

ج-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}-(x-1)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-2x}+(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}+(x-1)}$$
$$=0$$

<u>التأويل الهندسي</u>: المستقيم $y=x-1$

مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+1)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+(x-1)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}$$
$$=0$$

<u>التأويل الهندسي</u>: المستقيم $y=-x+1$

مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

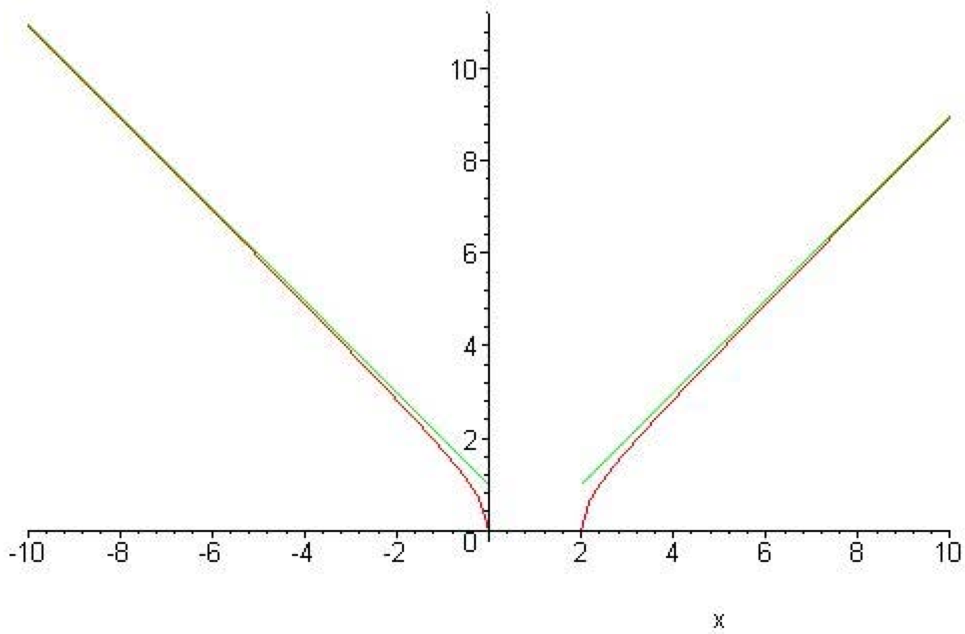
<u>د-* ادرس وضع المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x-1$ على المجال $[2,+\infty[$</u>

$\forall x\in]2;+\infty[: f(x)-(x-1)\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+(x-1)}\prec 0$ أي على هذا الحيز C_f تحت المستقيم $y=x-1$

<u>* -* ادرس وضع المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=-x+1$ على المجال $]-\infty,0]$</u>

$\forall x\in]-\infty;0[: f(x)-(-x+1)=\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}\prec 0$ أي على هذا الحيز C_f تحت المستقيم $y=-x+1$

ه-



التمرين الثاني

-1

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$=+\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين -1 و منحناها يقبل نصف مماس موازي لمحور الاراتيب على يمين النقطة $(-1;0)$ موجه نحو الاراتيب الموجبة .

-2

الدالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على $]-1,0[\cup]0;+\infty[$ إذن الدالة

$f:x\mapsto\sqrt[3]{x^3+x^2}$ قابلة للاشتقاق على $]-1,0[\cup]0;+\infty[$

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0;+\infty[: f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^3+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\times\left(3x^2+2x\right)$$

$$=\frac{x(3x+2)}{3\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}}$$

x	-1		$\frac{-2}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

-3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} = +\infty$$

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$$

$$=1$$

و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x$$

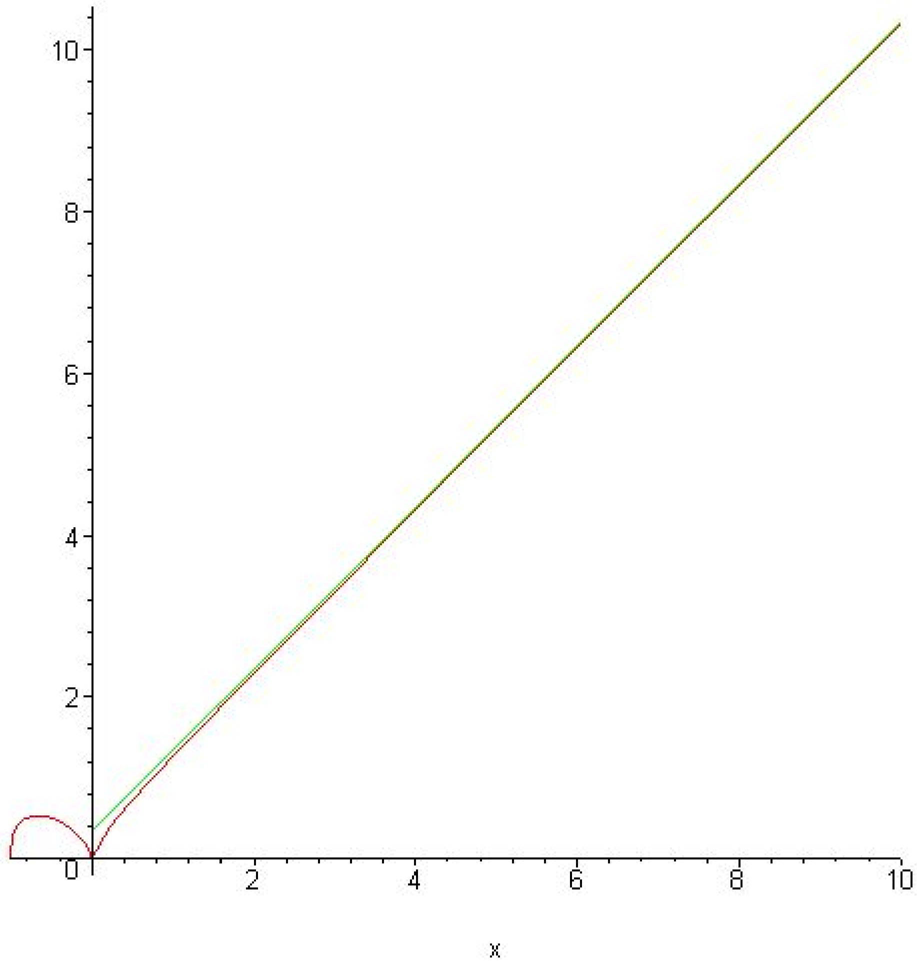
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{\left(\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{3}$$

إذن المستقيم $y=x+\frac{1}{3}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$



التمرين الثالث

-1

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

- لكل x من $\mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$

- لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arctan(-x) - (-x) \\ &= -\arctan(x) - (-x) \\ &= -(\arctan x - x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

إذن f دالة فردية . يكفي دراستها على المجال $[0;+\infty[$

-2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - x = -\infty$$

-3

-أ

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1$$
$$=\frac{-x^2}{1+x^2}\leq 0$$

ب-

$$y=f'(0)(x-0)+f(x)$$
$$=0$$

ج-

بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)-x+x-\frac{\pi}{2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)-\frac{\pi}{2}$$
$$=0$$

فإن المستقيم $y=-x+\frac{\pi}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

-4