



تصحیح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات

شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

دورة يونيو 2009

من إعداد : الأستاذ : علي الشريف

نيابة إقليم الخميسات

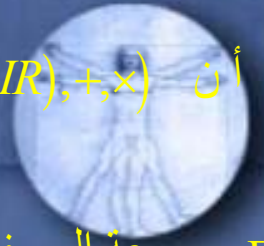
cherifalix@yahoo.fr



التمرين الأول (3 ن)

$M_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

ذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



تكون F مجموعة المصفوفات $M(x, y)$ من $M_2(\mathbb{R})$ بحيث: $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ مع $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

أ - بين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

ب - بين أن (F, \times) زمرة غير تبادلية.

ت - لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x, 0)$ من F بحيث $x \in \mathbb{R}^*$. بين أن G زمرة جزئية للزمرة (F, \times) .

ث - ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي \perp المعرف بما يلي: $(x, y) \perp (a, b) = \left(xa, xb + \frac{y}{a} \right)$

$$\varphi: (F, \times) \rightarrow (E, \perp)$$

$$M(x, y) \rightarrow \varphi(M(x, y)) = (x, y)$$

نعتبر التطبيق:

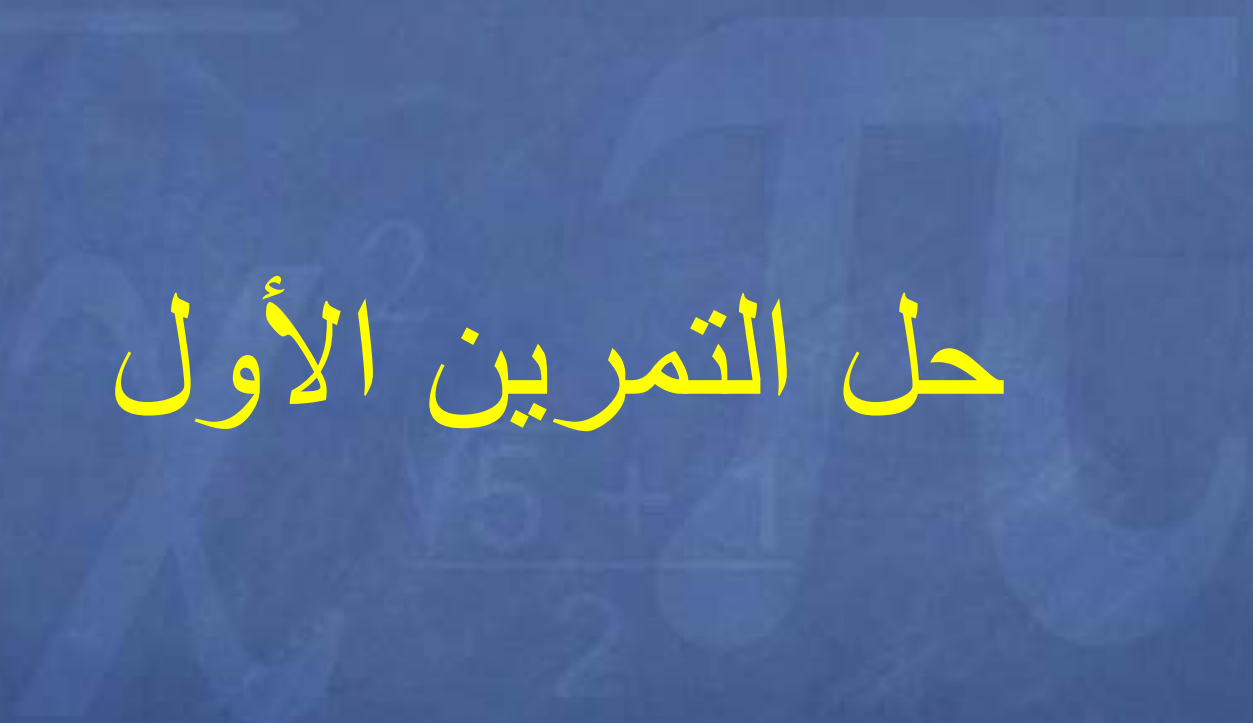
أ - حسب $(1, 1) \perp (2, 3)$ و $(2, 3) \perp (1, 1)$

ب - بين أن φ تشاكل تقابلي.

ج - استنتج بنية (E, \perp) .

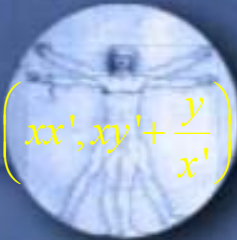


حل التمرين الأول



1- ليكن $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ عنصرين من F .

يبا : $M(x,y) \times M'(x',y') = \begin{pmatrix} xx' & xy' + \frac{y}{x'} \\ 0 & \frac{1}{xx'} \end{pmatrix} = M\left(xx', xy' + \frac{y}{x'}\right) : \left(xx', xy' + \frac{y}{x'}\right) \in IR * \times IR$: بما أن



أن $M(x,y) \times M'(x',y') \in F$ و بالتالي F جزء مستقر في $(M_2(IR), \times)$

ب - لنبين أن (F, \times) زمرة غير تبادلية .

• لدينا : $F \neq \emptyset$ لأن $I \in F$ • لدينا : $\forall M(x,y) \in F : M \times I = I \times M = M$ إذن I عنصر محايد ل F

لدينا F جزء مستقر في $(M_2(IR), \times)$ و " \times " تجميعي في $(M_2(IR), \times)$ إذن " \times " تجميعي في F "مثال 7 ص 161 الواضح"

• لدينا لكل $M(x,y) \in F$ $\det(M(x,y)) = 1$ إذن كل عنصر من F يقبل مائل . "مثال 7 ب- ص 164 الواضح"

• لدينا من أجل : $M(x,y) = M(1,1)$ و $M'(x',y') = M(2,3)$:

$$M(2,3) \times M(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad M(1,1) \times M(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ستنتج أن " \times " غير تبادلي في F . و بالتالي (F, \times) زمرة غير تبادلية .



- لتكن $G = \{M(x,0) \in F / x \in IR^*\}$ لتبين أن G زمرة جزئية لـ F .

لدينا: $I \in G \Rightarrow G \neq \emptyset$ • ليكن $M(x,0), M(y,0) \in G$ نلاحظ أن $M^{-1}(x,0) = M\left(\frac{1}{x},0\right)$

لدينا: $M(y,0) \times M^{-1}(x,0) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & 0 \\ 0 & \frac{x}{y} \end{pmatrix} = M\left(\frac{y}{x},0\right)$ و بالتالي G زمرة جزئية للزمرة (F, \times)

الخاصية المميزة للزمرة الجزئية ص 175
الواضح أو ص 227 المفيد

أ- ليكن $E = IR^* \times IR$, نزود E بقانون التركيب الداخلي \perp المعروف بما يلي :

$$\forall (x,y) \in E, \forall (a,b) \in E : (x,y) \perp (a,b) = \left(xa, xb + \frac{y}{a} \right)$$

حساب $(1,1) \perp (2,3) = \left(1 \times 2, 1 \times 3 + \frac{1}{2} \right) = \left(2, \frac{7}{2} \right)$: $(1,1) \perp (2,3)$

حساب $(2,3) \perp (1,1) = \left(2 \times 1, 2 \times 1 + \frac{1}{2} \right) = \left(2, \frac{5}{2} \right)$: $(2,3) \perp (1,1)$

ب- نعتبر التطبيق φ المعروف بما يلي :

$$M(x,y) \rightarrow \varphi(M(x,y)) = (x,y)$$

لتبين أن φ تشاكل تقابلي :

لدينا لكل $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ من F :

$$M(x,y) \times M'(x',y') = \varphi\left(M\left(xx', xy' + \frac{y}{x} \right) \right) = \left(xx', xy' + \frac{y}{x} \right) = (x,y) \perp (x',y') = \varphi(M(x,y)) \perp \varphi(M'(x',y'))$$

منه φ تشاكل .

لدينا : $\forall (x, y) \in E; \exists ! M(x, y) \in F / \varphi(M(x, y)) = (x, y)$ - نستج بالتالي أن φ تشاكل تقابلي .

ج - بنية : (E, \perp)

- حسب ما سبق لدينا (F, \times) زمرة غير تبادلية .

- ولدينا : φ تشاكل تقابلي من (F, \times) إلى (E, \perp) \longleftarrow و (F, \times) و (E, \perp) لهما نفس البنية الجبرية .

ملاحظة ص 177 الواضح

بالتالي (E, \perp) زمرة غير تبادلية .



التمرين الثاني (4 ن)

1- نعتبر في C المعادلة ذات المجهول z : $(E): z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$ حيث m عدد عقدي يخالف 1.

أ- تحقق من أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$

ب- حل في المجموعة C المعادلة (E) :

ج- حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1.

- نضع : $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$, في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألقاها على التوالي هي m و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$

- حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية .

أ- بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$ هو دوران ينبغي تحديد لحوركه Ω و قياس لزاويته .

ب- بين أن العدد العقدي $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا فقط إذا كان : $\text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$

ج- استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة .



حل التمرين الثاني

$$\frac{\sqrt{5+4}}{2}$$

-1- لتتحقق أن $\Delta = [(1+i)(1+m)]^2 + 4i(m^2+1)$:

لدينا : $\Delta = [(1-i)(1+m)]^2 + 4i(m^2+1)$ و بما أن : $(1-i)^2 = -2i$ و $(1+i)^2 = 2i$

فإن : $\Delta = -2i(1+2m+m^2) + 4m^2i + 4i = 2i - 4mi + 2m^2i = 2i(m-1)^2 = [(1+i)(m-1)]^2$:

ب- لنحل في \mathbb{C} المعادلة (E) :

بأستعمال صيغة Δ نحصل على :

$$z_2 = \frac{(1-i)(1+m) + (1+i)(m-1)}{2} = m-i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{(1-i)(1+m) - (1+i)(m-1)}{2} = 1-im$$

ج - تحديد قيمة m التي من أجلها $z_1 \times z_2 = 1$:

بينا : $z_1 \times z_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{a} = -i(m^2+1) = 1 \Leftrightarrow m^2 = -1+i$ خاصة 40ص43 الواضح أوخاصية 35 ص 53 المفيد

تطبيقات ص42 الواضح
أو أمثلة ص 52 المفيد

$$\underbrace{x^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} ; y^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} ; 2xy=1}_{(S)} : \text{ضع } m = x+iy \text{ فنحصل على النظمة :}$$



$$\underbrace{x^2 - y^2 = -1 ; x^2 + y^2 = \sqrt{2} ; 2xy=1}_{(S)}$$

$$m = -\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \right] \quad \text{أو} \quad m = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \quad \text{نستنتج أن :}$$

2- الشكل المثلثي ل z_1 و z_2 في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



$$z_1 = 1 - im = 1 - ie^{i\theta} = 1 + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} = e^{i(\frac{\theta - \pi}{4})} \left(e^{-i(\frac{\theta - \pi}{4})} + e^{i(\frac{\theta - \pi}{4})} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta - \pi}{4}\right) e^{i(\frac{\theta - \pi}{4})} \quad \text{بنا:}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta - \pi}{4} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\theta - \pi}{4}\right) > 0 \quad \text{لدينا:}$$



$$z_1 = 2 \cos\left(\frac{\theta - \pi}{4}\right) \left(\cos\left(\frac{\theta - \pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\theta - \pi}{4}\right) \right) \quad \text{الشكل المثلثي ل } z_1 \text{ هو:}$$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\theta + \pi}{4})} \left(e^{i(\frac{\theta + \pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta + \pi}{4})} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta + \pi}{4}\right) e^{i(\frac{\theta + \pi}{4})} \quad \text{و لدينا:}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta + \pi}{4} < \pi \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\theta + \pi}{4}\right) < 0 \quad \text{و لدينا:}$$



$$z_2 = 2 \cos\left(\frac{3\pi - \theta}{4}\right) \left(\cos\left(\frac{3\pi - \theta}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi - \theta}{4}\right) \right) \quad \text{الشكل المثلثي ل } z_2 \text{ هو:}$$

1-11- تحديد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث تكون $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ مستقيمية

نأ: $M_2(z_2); M_1(z_1); M(m)$ مستقيمية $\iff \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R} \iff i + m - im \in \mathbb{R}$

ضع $m = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(1, 0)\}$ نجد $y - x = 0 \iff i + x + iy - i(x + iy) \in \mathbb{R}$

و بالتالي مجموعة النقط هي المستقيم ذو المعادلة $1 + y - x = 0$ محروم من $M_0(1, 0)$

$R: P \rightarrow P$

أ- لنبين أن: دوران $M(Z) \rightarrow M'(z') / z' = 1 - iz$ دوران.

بنا $-i \neq 1$ و $|-i| = 1 \iff \mathbf{R}$ دوران مركزه $\Omega\left(\frac{1}{1 - (-i)}\right)$ أي $\Omega\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$ و قياس زاويته $g(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ خلاصة ص 59 المفيد

ب- لنبين أن $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$ لدينا: $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} = \frac{m - i - 1 + im}{m - i - m} = 1 + im - m - i$

$\text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1 \iff \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R} \iff \overline{1 + im - m - i} = -1 - im - m - i \iff \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R}$

ج- مجموعة النقط $M(m)$ بحيث تكون $M_2; M_1; M; \Omega$ متداورة.

بنا: $R(M) = M_1 \iff z_1 = 1 - im \iff$ المثلث $\Omega M M_1$ ثائم الزاوية في $\Omega \iff$ توجد دائرة وحيدة (ζ) مارة من ققط $M_1; M; \Omega$ قطرها $[MM_1] \iff$ النقط $M_2; M_1; M; \Omega$ متداورة $\iff M_2 \in (\zeta) \iff$ المثلث $M_2 M_1 M$

م الزاوية في $M_2 \iff \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$ وبوضع $m = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(1, 0)\}$

د أن مجموعة النقط هي المستقيم ذو المعادلة $x + y - 1 = 0$ محروم من النقطة $M_0(1, 0)$



التمرين الثالث (3 ن)

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$a_n \equiv 2 + 3 + 6 - 1$ تصع: \mathbb{N}^* من n

أ- تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من \mathbb{N}^*

ب- حدد قيم n التي يكون من أجلها: $a_n \equiv 0[3]$

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p > 3$

أ- بين أن: $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$

ب- بين أن p يقسم a_{p-2} .

ج- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير

عدم n بحيث $a_n \wedge q = q$.



حل التمرين الثالث

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

1- أ- لتتحقق من أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ عدد زوجي a_n .

خاصيات 3 ص 93 المفيد

بنا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0[2] \Leftrightarrow \underbrace{2 \equiv 0[2]}_1 ; \underbrace{6 \equiv 0[2]}_1 ; \underbrace{3 \equiv 1[2]}_1$ و منه عدد زوجي a_n .

ب- قيم n التيمن أجلها $a_n \equiv 0[3]$

بنا : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 2^n \equiv (-1)^n[3] \Leftrightarrow \underbrace{2 \equiv -1[3]}_2$ و $\underbrace{6 \equiv 0[3]}_1 ; \underbrace{3 \equiv 0[3]}_1$

خاصيات 3 ص 93 المفيد

1 و 2 نستنتج أن : $\underbrace{2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0[3]}_3 \Leftrightarrow a_n \equiv 0[3] \Leftrightarrow n$ عدد زوجي .

2- أ- لنبين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p] ; 3^{p-1} \equiv 1[p] ; 6^{p-1} \equiv 1[p]$

بينا : عدد أولي أكبر قطعاً من 3 $\Leftrightarrow p \wedge 2 = 1 ; p \wedge 3 = 1 ; p \wedge 6 = 1$ مبرهنة 14 ص 101 "المفيد"



حسب مبرهنة فيرما (أنظر ملاحظة
تابعة لمبرهنة 15 ص 102 المفيد)

$$2^{p-1} \equiv 1[p] ; 3^{p-1} \equiv 1[p] ; 6^{p-1} \equiv 1[p]$$

ب- لنبين أن : p / a_{p-2}

بنا : $a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \Leftrightarrow 6a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$ و بأستعمال السؤال 2-أ- نستنتج أن :

خاصية 6 ص 101 المفيد

لأن $p \wedge 6 = 1$ و بالتالي : $p / 6a_{p-2}$ و منه $6a_{p-2} \equiv 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 6 \equiv 0[p]$

ج- لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$

حسب 1-أ- $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2 \wedge a_n - 2 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : 2 / a_n - 1$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : a_n \wedge 3 \equiv 3 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : 3 \nmid a_n \quad \leftarrow q-3$$

$$\text{حسب السؤال -2- ب-} \quad n = q - 2 \Leftrightarrow q \nmid a_{q-2} \Leftrightarrow q > 3$$



cherifalix@yahoo.fr



مسألة (10 ن)



تبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$f_n(x) = x(1 - \ln(x))^n$; $x > 0$ و $f_n(0) = 0$ ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في م.م.م $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

جزء الأول :

أ- بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 . (يمكن وضع $x = t^n$)

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0.

ج - حدد النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

أ- أدرس تغيرات الدالة f_1 .

ب- أدرس تغيرات الدالة f_2 .

أ- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب- أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) (نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_2)) (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)



تعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} .dt$

أ- بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0]$ وأن : $(\forall x < 0) ; F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

ب- استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty, 0]$.

2 - أ- بين أن : $(\forall x < 0) ; \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$

ب- تحقق أن الدالة $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln(x)}{2} \right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$.

ج- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$

- نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$



جزء الثالث :

ل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x).dx$

أ- بين أن : $(\forall n \geq 1) : u_n \geq 0$

ب - حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$

ج - بين أن : $(\forall n \geq 1) : u_{n+1} \leq u_n$

د - استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة .

أ- بين أن : $(\forall n \geq 1) : u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$

ب - استنتج بالسنتيمتر المربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و (C_2)

و المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $x = e$ و $x = 1$.

أ- بين أن : $(\forall n \geq 2) : \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$ (يمكنك استعمال الأسئلة -1-أ , -1-ج , -2-أ-).

ب- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$.

- عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 .

تبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = a$ و $n \geq 1$ $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$.

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : $d_n = |v_n - u_n|$

- بين أن : $(\forall n \geq 1) : d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} \cdot d_1$

ب - بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$

ج - أستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة .



حل المسألة

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

1- اتصال f_n على اليمين في 0 .

ضع : $t^n = x$ فنحصل على : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n (1 - nt \ln(t))^n = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t - nt \ln(t))^n = 0 = f_n(0)$

و منه f_n متصلة يمين في 0 .
ب- اشتقاق الدالة f_n يمين 0 .



دينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln(x))^n = +\infty$ إذن f_n غير قابلة للإشتقاق يمين 0 .

ج- حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

دينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln(x)) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x))^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln(x))^2 = +\infty$

أ- تغيرات f_1

دينا f_1 قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ بحيث : $f_1'(x) = 1 - \ln(x) - 1 = -\ln(x)$ ($\forall x \in]0, +\infty[$)

نتنتج إذن جدول تغيرات f_1

x	0	1	$+\infty$		
f_1'		+	0	-	
f_1	0	↗	1	↘	$-\infty$



ب- لدينا f_2 قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ بحيث :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) ; f_2'(x) = (1 - \ln(x))^2 - 2x \times \frac{1}{x} (1 - \ln(x)) = (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)$$

نتنتج إذن جدول تغيرات f_2

x	0	e^{-1}	e	$+\infty$			
f_2'		+	0	-	0	+	
f_2			$4e^{-1}$		0		$+\infty$

3-أ- الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

لدينا : $(\forall x \in]0, +\infty[) : f_1(x) - f_2(x) = x \ln(x)(1 - \ln(x))$

وضع النسبي

x	0	1	e	$+\infty$		
$f_1(x) - f_2(x)$	0	-	0	+	0	-
الوضع النسبي		C_1 فوق C_2	C_2 فوق C_1	C_1 فوق C_2		





جزء الثاني :

- نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} .dt$

- أ- لنبين أن : الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0]$ وأن : $(\forall x < 0) ; F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

بيننا : $f_1(t) \rightarrow t$ متصلة على $[0, +\infty[$ و الدالة $x \rightarrow e^x$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty, 0[$ و $e(]-\infty, 0[) \subset [0, +\infty[$

إذن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0]$ بحيث :

$$(\forall x \in]-\infty, 0[) : F'(x) = -e^x \frac{f_1(e^x)}{1+e^{2x}} = -e^x \frac{e^x(1-\ln(e^x))}{1+e^{2x}} = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

- ب- تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty, 0]$:

لدينا : $(\forall x \in]-\infty, 0[) : (x-1) < 0$ و $(\forall x \in]-\infty, 0[) : \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} > 0 \Leftrightarrow (\forall x \in]-\infty, 0[) : F'(x) < 0$

إذن الدالة F تناقصية على المجال $]-\infty, 0]$.



$$(\forall x < 0); \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \quad \text{أ- لنبين أن :}$$

$$\text{بينا } \textcircled{1} (\forall x < 0): 0 < e^x < 1 \quad \textcircled{2} (\forall t \in [e^x, 1]): 0 < 1+e^{2x} \leq 1+t^2 \leq 2 \quad \textcircled{3} (\forall t \in [e^x, 1]): f_1(t) \geq 0$$

$$\text{من } \textcircled{1}; \textcircled{2}; \textcircled{3} \text{ نستنتج أن :} \quad (\forall t \in [e^x, 1]): \frac{1}{2} f_1(t) \leq \frac{1}{1+t^2} f_1(t) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} f_1(t)$$

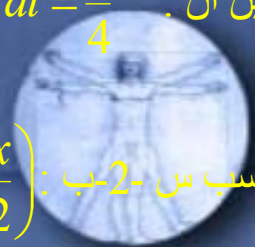
$$\text{منه :} \quad (\forall t \in [e^x, 1]): \int_{e^x}^1 \frac{1}{2} f_1(t) dt \leq \int_{e^x}^1 \frac{1}{1+t^2} f_1(t) dt \leq \int_{e^x}^1 \frac{1}{1+e^{2x}} f_1(t) dt$$

$$\text{بالتالي :} \quad (\forall x < 0); \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

ب- لتتحقق أن الدالة $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln(x)}{2} \right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$.

$$(\forall x \in]-\infty, 0[): \left(x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln(x)}{2} \right) \right)' = f_1(x) \quad \text{لدينا :}$$

لنبين أن : $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$



حسب س-2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{4} - e^{2x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right) = \frac{3}{4}$ ومنه $\int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \left[t^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln(t)}{2} \right) \right]_{e^x}^1 = \frac{3}{4} - e^{2x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right)$

نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x إلى $-\infty$. لنبين أن : $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$

خلال التأطير $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$ و $(\forall x < 0)$ س-2-ب نستنتج أن : $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$

جزء الثالث :

عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x) . dx$

لنبين أن : $(\forall n \geq 1) : u_n \geq 0$

لنا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \geq 0 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \int_e^1 f_n(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in [1, e]) : f_n(x) \geq 0$

لنحدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$

لنا : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -x \ln(x) (1 - \ln(x))$ و $(\forall x \in [1, e]) : \underbrace{0 \leq \ln(x); 0 \leq 1 - \ln(x); 0 \leq (1 - \ln(x))^n}_{*}$

$(\forall x \in [1, e]) : f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

- لدينا حسب السؤال السابق : $(\forall x \in [1, e]) : f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \Leftrightarrow \int_1^e f_{n+1}(x) dx \leq \int_1^e f_n(x) dx \Leftrightarrow (\forall n \geq 1) : u_{n+1} \leq u_n$

- تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$



بينما u_n مصغرة ب 0 و تناقصية حسب - ج- إذن فهي متقاربة .

- أ- لنبين أن : $(\forall n \geq 1) : u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$

لدينا : $u_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x) dx = \int_1^e x(1 - \ln(x))^{n+1} dx$ و بأستعمال المكاملة بالأجزاء نجد :

$$\underbrace{v'(x) = -(n+1) \frac{(1 - \ln(x))^n}{x}}_2 \Leftrightarrow v(x) = (1 - \ln(x))^{n+1} \text{ و } \underbrace{u(x) = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow u'(x) = x}_1$$

$$u_{n+1} = \int_1^e x(1 - \ln(x))^{n+1} dx = \left[\frac{x^2}{2} (1 - \ln(x))^{n+1} \right]_1^e + \frac{n+1}{2} \int_1^e x(1 - \ln(x))^n dx = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$$

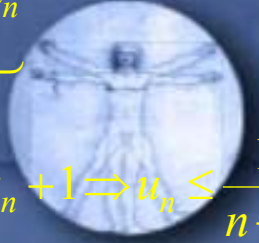
- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$.

$$S = \int_1^e |f_2(x) - f_1(x)| dx \times 4cm^2 = \frac{1}{2} \times 4cm^2 = 2cm^2 \quad \text{حسب 2-أ-}$$

- أ- لنبين أن : $(\forall n \geq 2) : \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$

بأستعمال 2-أ- وإشارة u_n

$$(\forall n \geq 2) : u_n - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)u_n - 1}{(n+1)} = \frac{2u_{n+1}}{(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq u_n$$



بأستعمال 1-ج- و 2-أ

$$(\forall n \geq 2) : u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow 2u_{n+1} + 1 \leq 2u_n + 1 \Rightarrow (n+1)u_n \leq 2u_n + 1 \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

و 2 نستنتج أن : $(\forall n \geq 2) : \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$

عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 . نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = a$ و $n \geq 1$ و $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$

كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : $d_n = |v_n - u_n|$

نبين أن : $(\forall n \geq 1) : d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

رجع لدينا : من أجل $n=1$: $d_1 = \frac{1!}{2^{1-1}} d_1 = d_1$ إذن العبارة صحيحة .

فترض أن العبارة صحيحة من أجل : $n \geq 1$ أي : $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

بيننا : $d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}| = \frac{(n+1)}{2} |v_n - u_n| = \frac{(n+1)}{2} d_n = \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$

التالي : $(\forall n \geq 1) : d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$



ب- ليبن أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$

بنا : $(\forall n \geq 1) : d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1 \Rightarrow \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+1}{2}$ و $(\forall n \geq 3) : \frac{n+1}{2} \geq 2$

1 و 2 نستنتج أن : $(\forall n \geq 3) : \frac{d_{n+1}}{d_n} \geq 2 \Rightarrow d_n \geq 2^{n-3} \cdot d_3$ و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$

ج- لنستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة .

إذا كانت $(v_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و لدينا $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة فإن (d_n) ستكون متقاربة و هذا تناقض و بالتالي $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة .

cherifalix@yahoo.fr

GSM : 0664865556