

:	:	:
.	.	.

()

أ- بين أن u^3 و v^3 هما حلا المعادلة :

$$(E): x^2 - 4x + 125 = 0$$

ب- تحقق من أن : $x^2 - 4x + 125 = (x-2)^2 + 121$

لحل المعادلة (E) استعمل العالم الرياضي الايطالي

بومبيلي BOMBELLI العددين التخيليين $\sqrt{-1}$

و $-\sqrt{-1}$ اللذين رمز لهما فيما بعد العالم السويسري أولير

Euler بالرمزين i و $-i$ على التوالي حيث $i^2 = -1$.

المعادلة : $(E): x^3 - 15x - 4 = 0$ تسمى معادلة بومبيلي

ج- باستعمال الرمز i وبتطبيق نفس خاصيات عمليتي الجمع

و الضرب في IR , بين أن حلي المعادلة (E_1) هما :

$$2 + 11i \text{ و } 2 - 11i$$

د- بتعويض i^2 بالعدد -1 و باستمال جميع قواعد الحساب

في IR تحقق من أن :

$$(2+i)^3 = 2+11i \text{ و } (2+i)^3 = 2-11i$$

ه- بوضع $u = 2+i$ و $v = 2-i$ بين أن $u+v$ حل

للمعادلة (E).

و هكذا عن طريق أعداد تخيلية استطاع بومبيلي تحديد حل

حقيقي للمعادلة (E).

⊗ **نشاط بنائي رقم 2 :** (التمثيل الهندسي لعدد عقدي)

المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A و B و C و D الممثلة في الشكل جانبه :

1) نربط كل نقطة $M(x; y)$ من المستوى بالعدد

$$\text{العقدي } z_M = x + iy$$

حدد الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D المرتبطة على

التوالي بالنقط A و B و C و D .

2) حدد زوج احداثيتي كل نقطة من النقط المرتبطة

بالأعداد العقدية التالية :

$$3. z_3 = -4 + i \text{ و } z_2 = -1 + 2i \text{ و } z_1 = -3$$

3) بما أن \vec{OM} و M لهما نفس الاحداثيات , فانه يمكن

ربط المتجهة \vec{OM} بالعدد العقدي z_M .

أ- حدد زوج احداثيتي النقطة N التي تحقق :

$$\vec{ON} = \vec{AB} \text{ ثم استنتج } z_N$$

ب- تحقق من أن : $z_N = z_B - z_A$

(العدد $z_B - z_A$ يسمى لحق المتجهة \vec{AB}).

⊗ **نشاط بنائي رقم 3 :** (العمليات في C)

نعتبر العددين العقديين التاليين :

$$z_2 = 2 - i \text{ و } z_1 = 1 + 3i$$

1) أ- أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية :

$$z_1 + z_2 \text{ و } 2z_2 \text{ و } z_1 \times z_2$$

ب- أحسب الجداء $(1+3i) \times (1-3i)$ ثم استنتج الشكل

أنشطة تذكيرية

⊗ **نشاط تذكيري رقم 1 :** (الهندسة التحليلية في المستوى)

نعتبر النقط : $A(2;0)$ و $B(-3;0)$ و $C(-1;2)$.

1) حدد زوج احداثيتي النقطة I منتصف القطعة $[BC]$.

2) حدد زوج احداثيتي كل من المتجهتين : $\frac{1}{2}\vec{AC}$

و $2\vec{AB} - \vec{AC}$ و أحسب AB و BC .

3) حدد طبيعة ثم معادلة ديكارتية لكل من المجموعتين

التاليتين :

$$\text{أ- } E_1 = \{M(x; y) \in (P) / MA = MB\}$$

$$\text{ب- } E_2 = \{M(x; y) \in (P) / MC = AB\}$$

⊗ **نشاط تذكيري رقم 2 :** (الحساب المثلثي)

لتكن (φ) الدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C و D من الدائرة (φ) ذات

الأفاصل المنحنية $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{2}$ على التوالي .

1) مثل النقط A و B و C و D .

2) حدد زوج احداثيتي كل من النقط A و B و C و D .

3) حدد قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{OA}; \vec{OB})$.

4) ليكن α عددا حقيقيا ينتمي الى المجال $]\pi; -\pi]$.

حدد قيمة α التي من أجلها يكون لدينا :

$$\sin \alpha = -\frac{1}{2} \text{ و } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

⊗ **نشاط تذكيري رقم 3 :** (مجموعات النقط من المستوى)

1) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (φ) في الحالتين التاليين :

أ- مركزها O وشعاعها 4 .

ب- $[AB]$ قطر لها بحيث : $A(1;-3)$ و $B(3;5)$.

2) حدد ومثل مجموعة النقط $M(x; y)$ من

المستوى (P) , في كل حالة من الحالات التالية :

$$\text{أ- } x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$$

$$\text{ب- } x - 2 = 0$$

$$\text{ج- } x^2 - y^2 = 0$$

$$\text{د- } y = 4$$

أنشطة بنائية

⊗ **نشاط بنائي رقم 1 :** (التحسيس بالأعداد العقدية)

نعتبر المعادلة : $(E): x^3 - 15x - 4 = 0$

1) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا .

2) تحقق من أنه اذا كان u و v عددين

يحققان $u^3 + v^3 = 4$ و $u.v = 5$ فان $u+v$ حل

للمعادلة (E).

3) ليكن u و v العددين اللذين يحققان : $u^3 + v^3 = 4$

و $uv = 5$.

:	:	:
.	.	.

()

- (3) نعتبر النقطتين A و B ذات اللحقين $z_A = 2 + i$ و $z_B = -1 + 5i$ على التوالي .
 أ- تحقق من أن : $AB = 5$.
 ب- أحسب $|z_B - z_A|$ ثم استنتج أن : $AB = |z_B - z_A|$.
 (4) ليكن z و z' عددين عقديين .
 أ- تحقق من أن $|zz'|^2 = (z\bar{z}) \times (z'\bar{z}')$.
 ثم استنتج أن : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
 ب - نفترض أن z غير منعدم .
 آستنتج أن : $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ و $\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
 ج - بين أن : $|\bar{z}^n| = |z^n|$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

- الجبري للعدد العقدي $\frac{1}{1+3i}$.
 (2) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و S ذات الألقاق على التوالي z_1 و z_2 و $z_1 + z_2$.
 أ- مثل النقط A و B و S .
 ب- بين أن : $\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{OB}$, ما طبيعة الرباعي $OASB$ ؟
 ج- حدد z_1' لحق النقطة A' ماثلة النقطة A بالنسبة للنقطة O , ثم استنتج أن : $z_1' = -z_1$.
 (3) لتكن B' صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه O ونسبته 2 . حدد لحق النقطة B' ثم مثلها .

⊗ نشاط بنائي رقم 4: (مرافق عدد عقدي)

⊗ **نشاط بنائي رقم 6:** (العمدة و الشكل المثلثي)
 في المستوى العقدي (P) , نعتبر الدائرة المثلثية (C) المرتبطة بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- (1) - لتكن A النقطة ذات اللحق : $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 أ- تحقق من أن : $A \in (C)$.
 ب- بين أن : $\left(\vec{u}; \vec{OA} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
 ج- تحقق من أن : $z_A = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ (1) .
 (2) لتكن B النقطة ذات اللحق : $z_B = \sqrt{3} + 3i$.
 أ- تحقق من أن : $z_B = |z_B| \cdot z_A$.
 ب- استنتج أن : $z_B = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ (2) .

- (1) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}; \vec{v})$, النقطة A ذات اللحق $z = 5 + 2i$.
 أ- مثل النقطة A .
 ب- لتكن A' ماثلة النقطة A بالنسبة لمحور الأفاصيل .
 • استنتج لحق النقطة A' .
 (2) ليكن $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ عددين عقديين حيث :
 x و y و x' و y' أعداد حقيقية .
 أ- تحقق من أن : $z + \bar{z} = 2x$ و $z - \bar{z} = 2iy$ و $\bar{z} = \overline{z}$.

- ب- بين أن : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ و $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
 نفترض في كل ما يلي أن : $z \neq 0$.
 ج- بين أن : $\left(\frac{z'}{z} \right) = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$ و $\left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\bar{z}}$ (لاحظ أن :
 $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$ و $1 = z \times \frac{1}{z}$) .
 د- باستعمال الاستدلال بالترجع , بين أن :
 $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (\bar{z}^n) = \overline{(z^n)}$.
 ثم استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{Z}) (\bar{z}^n) = \overline{(z^n)}$.

⊗ **نشاط بنائي رقم 7:** (العمليات على العمدة)
 المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر العددين العقديين التاليين : $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = \sqrt{3} + i$.

- (1) تحقق من أن $\arg(z_1) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ و $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.
 (2) أكتب الجداء $z_1 \times z_2$ على الشكل الجبري ثم استنتج شكلا مثلثيا للعدد $z_1 \times z_2$.
 (3) نعتبر النقط $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ و $P(z_1 \times z_2)$.
 أ- مثل النقط M_1 و M_2 و P .
 ب- تحقق من أن :
 $\left(\vec{u}; \vec{OP} \right) \equiv \left(\vec{u}; \vec{OM}_1 \right) + \left(\vec{u}; \vec{OM}_2 \right) [2\pi]$.

⊗ **نشاط بنائي رقم 5:** (معيار عدد عقدي)

- نعتبر في المستوى العقدي , النقطة M ذات اللحق z حيث :
 $z = x + iy$ مع x و y عدنان حقيقيان .
 (1) أ- أحسب المسافة OM بدلالة x و y .
 ب- أحسب $\overline{zz'}$ بدلالة x و y ثم استنتج أن $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
 (2) لتكن النقطة M' ماثلة النقطة M بالنسبة لمحور الأفاصيل , و M'' ماثلة النقطة M بالنسبة للنقطة O .
 أ- حدد لحق كل من النقطتين M' و M'' .
 ب- تحقق من أن : $OM = OM' = OM''$ ثم استنتج :
 $|z| = |\bar{z}| = |z|$.

:	:	:
.	.	.

()

⊙ تمرين تطبيقي رقم 4:

ليكن $z = 2 - 3i$ و $z' = 1 + 4i$.
أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

- ① $z + z'$ و $z \times z'$ و $\frac{1}{z}$ و z^2 , ② $2iz + 4z'$
③ $(z - z')^3$, ④ $\frac{z + 2i}{z - 1}$.

⊙ تمرين تطبيقي رقم 5:

حدد العددين الحقيقيين x و y بحيث يكون لدينا:

- ① $4x + y + i(x - 2y) = 5 - i$
② $4y + i(x - y + 5) = 4 + 7i$

⊙ تمرين تطبيقي رقم 6:

حدد قيمة (أو قيم) العدد الحقيقي x التي من أجلها يكون العدد العقدي $z = x + 3 + i(x^2 - 4x)$:
1) عددا حقيقيا.
2) عددا تخيليا صرفا.
3) يساوي العدد العقدي $4 - 3i$.

⊙ تمرين تطبيقي رقم 7:

هل توجد قيمة (أو قيم) للعدد الحقيقي x التي من أجلها يكون العدد العقدي $z = (x^2 + x - 2) + i(x^2 - 1)$:
1) $z = 0$ ؟
2) $\text{Re}(z) = 4$ ؟
3) $\text{Im}(z) = -5$ ؟

⊙ تمرين تطبيقي رقم 8:

لكل عدد عقدي z يخالف العدد 1, نضع $Z = \frac{z - 2i}{z - 1}$:
1) نضع $z = x + iy$, مع $(x, y) \in \mathbb{R}$.
حدد $\text{Re}(Z)$ و $\text{Im}(Z)$ بدلالة x و y .
2) حدد و مثل, في المستوى العقدي, مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا حقيقيا.
3) حدد و مثل, في المستوى العقدي, مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا.

⊙ تمرين تطبيقي رقم 9:

حدد, بطريقتين مختلفتين, الشكل الجبري لمرافق العدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية:
1) $z = (1 - i)(5 + 2i)$
2) $z = (3 - 2i)^2$
3) $z = \frac{3 + 4i}{2 + i}$
4) $z = \frac{(3 + i)(4 - i)}{2 + 3i}$

ثم استنتج أن $\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$
4) ليكن z و z' عددين عقديين, باستعمال العلاقة (*),

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi] \quad \text{استنتج أن:}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi] \quad \text{ثم}$$

$$\text{و } (\forall n \in \mathbb{N}); \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

⊙ **نشاط بنائي رقم 8:** (زاوية متجهتين و العمدة)
لتكن A و B و C ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من المستوى العقدي, أحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C .

نعتبر النقطة M من المستوى العقدي بحيث $\vec{AB} = \vec{OM}$.

$$(1) \text{ بين أن: } \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{u}; \vec{AB}) [2\pi]$$

$$(\text{لاحظ أن } (\vec{u}; \vec{AB}) \equiv (\vec{u}; \vec{OM}) [2\pi])$$

$$\text{و أن: } \arg(z_C - z_A) \equiv (\vec{u}; \vec{AC}) [2\pi]$$

(2) أـ تحقق من أن:

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv (\vec{u}; \vec{AC}) - (\vec{u}; \vec{AB}) [2\pi]$$

$$\text{بـ استنتج أن: } (\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

تمارين تطبيقية

⊙ تمرين تطبيقي رقم 1:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

- ① $5 + (3 - i)$, ② $1 + i(2 + i)$, ③ $7(i - 2)$
④ $2i(1 - i) + 3i$, ⑤ $(1 + 2i)^2$, ⑥ $(1 + 2i)(7 - 4i)$
⑦ $(\sqrt{3} - i)^2$, ⑧ $2i(1 + 3i)^2$, ⑨ $(i)^7$, ⑩ $-\frac{1}{7i}$
⑪ $\frac{4 - i}{3 + 5i}$, ⑫ $\frac{-1 + i}{1 + i\sqrt{3}}$, ⑬ $\frac{(1 - 2i)^2}{(3 + i)^2}$

⊙ تمرين تطبيقي رقم 2:

حل في المجموعة C المعادلات التالية:

$$① z - i = 2iz + 3, \quad ② iz(z - i) = 3z$$

$$③ 2iz - 3z + 4iz = 2i - 5z, \quad ④ -4i = \frac{iz + 3}{z - 1}$$

حل في المجموعة C , النظامين التاليتين ذات المجهولين z_1 و z_2 :

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = i \\ iz_1 + z_2 = 1 \end{cases} \quad ②, \quad \begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ 2z_1 - 3iz_2 = 17 \end{cases} \quad ①$$

:	:	:
.	.	.

()

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 17:**

حدد ثم مثل مجموعة النقط M ذات اللوح z الذي يحقق :

① $|z-i|=4$, ② $|z|=2\sqrt{3}$, ③ $|z-2i|=|z+i|$

④ $|z+1|=|z-2+3i|$, ⑤ $|z-3+4i|=|\bar{z}+2i|$

⑥ $|z|=2$ و $\text{Im}(z)=1$

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 18:**

نعتبر في المستوى العقدي , النقطتين B و C ذات اللوحين

$z_B = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_C = 2-2i\sqrt{3}$ على التوالي .

(1) تحقق من أن النقطتين B و C تنتميان الى الدائرة (C) التي مركزها O و شعاعها 4 .

(2) نعتبر النقطة A ذات اللوح z_A بحيث : $z_A = \frac{z_C - z_B}{2}$

أحسب z_A ثم $|z_B - z_A|$ و $|z_C - z_A|$ و $|z_B - z_C|$

(3) حدد طبيعة المثلث ABC .

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 19:**

أنشئ النقط A و B و C و D التي ألقاها على التوالي z_A

و z_B و z_C و z_D تحقق :

(1) $|z_A|=3$ و $\arg(z_A) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

(2) $|z_B|=2$ و $\arg(z_B) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$

(3) $|z_C|=\frac{1}{2}$ و $\arg(z_C) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

(4) $|z_D|=4$ و $\arg(z_D) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 20:**

حدد عمدة للعدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية :

① $z_1 = 1-i$, ② $z_2 = -\sqrt{3}+i$, ③ $z_3 = -1-i\sqrt{3}$

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 21:**

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية :

(1) $z_1 = -2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

(2) $z_2 = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$

(3) $z_3 = \sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$

(4) $z_4 = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

(5) $z_5 = 1 \cos\frac{2\pi}{9} \sin\frac{2\pi}{9}$

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 10:**

نضع : $z_1 = \frac{1-i}{3+5i}$ و $z_2 = \frac{1+i}{3-5i}$ بدون حساب

$z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ بين أن $z_1 + z_2$ عدد حقيقي , وأن $z_1 - z_2$ عدد تخيلي صرف .

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 11:**

نضع $z = x+iy$ (x و y عدنان حقيقيان)

(1) حدد الشكل الجبري للعدد العقدي $5\bar{z} + 3iz$

(2) حل في المجموعة IC المعادلة : $5\bar{z} + 3iz = 2+i$

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 12:**

حل في المجموعة C المعادلتين التاليتين :

(1) $2\bar{z} = 5-2i$, (2) $(3+i)\bar{z} - 5+7i = 0$

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 13:**

لكل عنصر z من C نضع : $f(z) = z^2 + 2z - 4$

(1) بين أن لكل z من IC لدينا : $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

(2) أحسب $f(2-i)$ ثم استنتج $f(2+i)$.

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 14:**

حدد في كل حالة في المستوى العقدي مجموعة النقط M

ذات اللوح z الذي يحقق :

(1) $3z = 4 + \bar{z}$, (2) $z + 5\bar{z} = 6 + 8i$

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 15:**

(1) أحسب معيار الأعداد العقدية التالية : -4 ; $\frac{1}{2}i$;

$3+4i$; $-3i$.

(2) أحسب معيار العدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية :

① $z = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})$, ② $z = (3-2i)^3$

③ $z = \frac{3-\sqrt{3}i}{5+5i}$, ④ $z = (1+i\sqrt{3})(4-i)$

⑥ $z = \left(\frac{1+i}{2iu}\right)^6$.

⊙ **تمرين تطبيقي رقم 16:**

نعتبر في المستوى العقدي , النقط A و B و C التي

ألقاها على التوالي هي :

$a = -1+i$ و $b = 2i$ و $c = 2-2i$.

(1) أحسب $|a-b|$ و $|a-c|$ و $|c-b|$.

(2) استنتج طبيعة المثلث ABC .

:	:	:
.	.	.

()

⊙ تمرين تطبيقي رقم 22:

ليكن $z = 2(-1+i)$ و $z' = -2 + 2i\sqrt{3}$. حدد على الشكل المثلي:

$$z \times z', \frac{1}{z}, \frac{z'}{z}, \frac{z}{z'}, z^2, z^3, z^4.$$

⊙ تمرين تطبيقي رقم 23:

حدد عمدة للعدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية:

$$\textcircled{1} z = (1-i)^2, \textcircled{2} z = (1-i)(-\sqrt{3}+i)$$

$$\textcircled{3} z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}, \textcircled{4} z = \frac{\sqrt{3}-i}{2i}, \textcircled{5} z = \frac{2}{-2+2i}$$

$$\textcircled{6} z = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$$

⊙ تمرين تطبيقي رقم 24:

حدد و مثل مجمة العقدة (z) في كل حالة من الحالتين التاليتين:

$$\textcircled{1} \arg(\bar{z}) \equiv \arg(-z) [2\pi]$$

$$\textcircled{2} \arg(\bar{z}+2) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\textcircled{3} |z|=2 \text{ و } \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

⊙ تمرين تطبيقي رقم 25:

حدد التمثيل العقدي للازاحة t التي متجهتها $\frac{1}{2}\bar{u}-\bar{v}$ و استنتج لحق النقطة B صورة النقطة $A(i)$ بالازاحة t

⊙ تمرين تطبيقي رقم 26:

تعرف على التحويل الذي تمثيله العقدي كما يلي:

$$\textcircled{أ} z' = z - 3i, \textcircled{ب} z' = 1 - z$$

$$\textcircled{ج} z' + i = -2(z+i), \textcircled{د} z' = 3z - 2i$$

⊙ تمرين تطبيقي رقم 27:

نعتبر تحويل T تمثيله العقدي $z' = -5(z+3i)$.

أ) برهن أنه توجد نقطة وحيدة M تحقق $T(M) = M$

(نرمز ب Ω الى هذه النقطة و ب ω الى لحاقها)

ب) تحقق أن: $z' - \omega = -5(z - \omega)$.

ج) تعرف على التحويل T .

⊙ تمرين تطبيقي رقم 28:

حدد التمثيل العقدي لكل من التحويلات التالية:

$$\textcircled{أ} \text{الازاحة التي متجهتها } w(2 + \frac{1}{2}i)$$

ب) التحاكي الذي مركزه $I(i)$ ونسبته $-\frac{1}{3}$.

ج) التحاكي الذي مركزه $A(1-i)$ و يحول

النقطة $B(-1-5i)$ الى النقطة $C(2+i)$.

⊙ تمرين تطبيقي رقم 29:

ليكن T تحويلا للمستوى تمثيله العقدي

$$z' = (1 + \sqrt{2})z - 2i$$

1- أثبت أنه توجد نقطة وحيدة Ω لحقاها ω بحيث

$$T(\Omega) = \Omega$$

2- أكتب $z' - \omega$ بدلالة $z - \omega$.

3- استنتج طبيعة التحويل T .

تمارين داعمة

⊙ تمرين رقم 1:

ليكن u عددا عقديا بحيث:

$$|u|=1 \text{ و } \arg(u) \equiv \theta [2\pi] \text{ و } (-\pi < \theta < \pi)$$

1- أ) عبر عن $1 + \cos \theta$ و $\sin \theta$ بدلالة:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ب) استنتج كتابة $1+u$ على شكله المثلي.

2- نعتبر النقط M و P و I التي أحاقها هي على

التوالي u و $1+u$ و 1 .

أ) ما هي طبيعة الرباعي $OMPI$ ؟

ب) استنتج مرة ثانية كتابة $1+u$ على شكله المثلي.

⊙ تمرين رقم 2:

نعتبر النقط A و B و I التي لحاقها على

التوالي $z_A = 3 + 2i$ و $z_B = -3$ و $z_I = 1 - 2i$.

1- مثل النقط A و B و I (وحدة القياس $1cm$).

$$2- \text{أكتب على الشكل الجبري العدد العقدي } Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث IAB ؟

3- أحسب z_C لحق النقطة C صورة النقطة I بالتحاكي

الذي مركزه A و نسبته 2 .

4 أ) ليكن D مرجح النقط: $\{(C,1); (B,-1); (A,1)\}$

أحسب z_D لحق النقطة D

⊙ تمرين رقم 3:

ليكن عددا عقديا يخالف -1 و M صورته في المستوى

$$\text{العقدي نضع: } Z = \frac{1-2z}{i.z+i}$$

1) بوضع $z = x + iy$ حيث x و y عددان عقديان, حدد

$\text{Re}(z)$ و $\text{Im}(z)$ بدلالة x و y .

2) حدد ثم أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها

يكون Z عددا حقيقيا.

3) حدد ثم أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها

يكون Z عددا حقيقيا.

:	:	:
.	.	.

()

أ حسب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ ثم أكتب على الشكل الآسي

أستنتج طبيعة المثلث ABC .

تمرين رقم 7:

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد م. مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 (1) أ حسب معيار الأعداد العقدية التالية :

$$\frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}, \frac{7-35i}{3-2i}, (7+35i)(3+2i)$$

(2) حدد مجموعة النقط M ذات اللق Z حيث $Z \cdot \bar{Z} = 4$

(3) نعتبر النقطة A ذات اللق $(2+3i)$ حدد مجموعة النقط M ذات اللق Z حيث :

$$|Z - (2+3i)| = 5$$

(4) نعتبر العدد العقدي $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ أ حسب

$|j|$. بين أن $j^2 = \bar{j}$ ثم أستنتج أن $j^3 = 1$

تمرين رقم 8:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

نعتبر الأعداد $z_2 = \frac{2+6i}{3-i}$, $z_1 = (1-i)(1+2i)$

بحيث $z_3 = \frac{4i}{i-1}$, $M_3(z_3)$, $M_2(z_2)$, $M_1(z_1)$

(1) أكتب الأعداد z_3 ; z_2 ; z_1 على الشكل الجبري .

(2) بين أن المثلث $M_1M_2M_3$ قائم الزاوية و متساوي الساقين .

تمرين رقم 9:

ليكن u عددا عقديا غير منعدم و j العدد العقدي بحيث

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نضع $u = [r, \theta]$ و $z_1 = uj$ و $z_2 = ui$

(1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

(2) نضع $Z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2}$

أ- حدد معيار وعمدة العدد العقدي $\bar{z} - i$

نأخذ : $\left(\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} \right)$

ب- استنتج الشكل المثلثي للعدد Z بدلالة r و θ

(3) أ- حدد قيم θ التي يكون من أجلها Z عددا حقيقيا موجبا .

ب- حدد قيم θ التي من أجلها Z تخليا صرفا .

تمرين رقم 4:

نعتبر في C المعادلة (E) التالية :

$$(E): \left(\frac{Z-i}{Z+i} \right)^2 = 2i \left| \frac{Z}{Z+3i} \right|$$

(1) بين أن Z يكون حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كان

$$\left(\frac{Z-i}{Z+i} \right)^2 = i \text{ و } |Z+3i| = 2|Z|$$

(لا حظ أن: $\overline{Z-i} = \bar{Z} + i$)

(2) لتكن (C) مجموعة النقط M من المستوى العقدي

ذات اللق Z بحيث : $|Z+3i| = 2|Z|$

بين أن (C) دائرة مطلوب تحديد مركزها و شعاعها .

(3) لتكن (Gamma) مجموعة النقط M من المستوى العقدي ذات

$$\text{اللحق Z بحيث : } \left(\frac{Z-i}{Z+i} \right)^2 = i$$

بين أن (Gamma) هي اتحاد مستقيمين بأستثناء نقطة مطلوب تحديدها .

(4) أستنتج عدد حلول المعادلة (E) .

تمرين رقم 5:

المستوى منسوب إلى م.م.م م. $(O; \vec{u}; \vec{v})$

لكل z من $C - \{-1; 1\}$ نضع $g(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$

(1) حدد على الشكل الجبري حلي المعادلة $g(z) = i$

(2) نضع : $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ و $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

نعتبر في المستوى النقط M_1 و M_2 و N التي ألقاها

على التوالي هي z_1 و z_2 و $\sqrt{3} - \frac{i}{2}$.

أ- بين أن النقط M_1 و M_2 و N مستقيمية

ب- أكتب كلا من العدد بين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ج- أ حسب $z_1^{60} + z_2^{60}$.

(3) أ- بين أن لكل z من $C - \{-1; 1\}$.

$g(z) \Leftrightarrow (z + \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$ تخيلي صرف .

ب- حدد في المستوى المجموعة C للنقط $M(z)$

بحيث $g(z)$ عددا عقديا تخليا صرفا .

تمرين رقم 6:

في المستوى المنسوب إلى المعلم م.م $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A ; B ; C التي ألقاها $Z_A ; Z_B ; Z_C$

حيث $Z_C = 1 + \sqrt{3} + i$, $Z_B = 1 + 2i$, $Z_A = 1$