إنجاز الاستاذ : محسن الشرفي ثانوية المختار السوسي المعازيز
Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين

نعتبر في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

(S) مجموعة النقط $M\left(x,y\right)$ تحقق العلاقة : $x^2+y^2+z^2-6x+4z+9=0$ و النقط $A(1,1,1)$ و $B(3,1,0)$ و $C(-1,0,1)$.

1 – بين أن (S) فلكة محددا مركزها Ω و شعاعها R .

2 – أ – أحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

ب – استنتج أن النقط A و B و C نقط غير مستقيمية .

ج – حدد معادلة المستوى (ABC) .

3 – بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) في دائرة (C) محددا مركزها O و شعاعها r .

4 – حدد معادلة المستوى (P) المماس للفلكة في النقطة $C(-1,0,1)$.

5 – حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P).

6 – حدد معادلة للفلكة (S') المماسة للمستوى (ABC) في النقطة A و مركزها ينتمي إلى المستوى $(Q)\,x+y+z=0$.

الحل :

1 –
$$x^2+y^2+z^2-6x+4z+9=0$$
$$x^2-6x+y^2+z^2+4z+9=0$$
$$x^2-6x+9-9+y^2+z^2+4z+4-4+9=0$$
$$(x-3)^2+y^2+(z+2)^2=4$$
$$(x-3)^2+y^2+(z+2)^2=2^2$$

إذن مجموعة النقط (S) هي فلكة مركزها $\Omega(3,0,-2)$ و شعاعها $R=2$.

2 – أ – لنحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

لنحدد إحداثيتي المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,-1,0)$ إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-1\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-1,2,-2)$

ب – بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين و منه النقط A و B و C نقط غير مستقيمية .

ج – المستوى (ABC) المحدد بالنقط الغير المستقيمية A و B و C

هو المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية عليه.

إذن معادلة المستوى (ABC) تكتب على الشكل $-x+2y-2z+d=0$.

و بما أن (ABC) يمر من A فإن : $-1+2-2+d=0$ ومنه $d=1$ إذن معادلة (ABC) هي $-x+2y-2z+1=0$.

3 – * لكي نبين أن (ABC) يقطع الفلكة (S) نحسب المسافة بين $\Omega(3,0,-2)$ مركز الفلكة و المستوى (ABC) .

$$d\left(\Omega,(ABC)\right)=\frac{\left|-3+2\times0-2\times(-2)+1\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}<r=2$$

بما أن $d\left(\Omega,(ABC)\right)<r$ فإن (ABC) يقطع الفلكة (S) في دائرة .

* لنحدد مركز و شعاع الدائرة (C) تقاطع المستوى (ABC) و الفلكة (S) .

*** لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC) .

بما أن (D) يمر من Ω و عمودي على (ABC) فإن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-1,2,-2)$ موجهة له .

ومنه : $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 0 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 2t \end{cases}$

**لنحدد نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة التقاطع إذن $\begin{cases} \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 0 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 2t \end{cases} \\ -x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

و بالتالي $-(3-t) + 2(2t) - 2(-2-2t) + 1 = 0$

$$-3 + t + 4t + 4 + 4t + 1 = 0$$
$$9t + 2 = 0$$
$$t = \frac{-2}{9}$$

$$\begin{cases} x = 3 - \left(\frac{-2}{9}\right) = 3 + \frac{2}{9} = \frac{29}{9} \\ y = 0 + 2\left(\frac{-2}{9}\right) = \frac{-4}{9} \\ z = -2 - 2\left(\frac{-2}{9}\right) = -2 + \frac{4}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases}$$

ومنه فإن مركز الدائرة (C) هو النقطة $I\left(\frac{29}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-14}{9}\right)$

***لنحدد r شعاع الدائرة (C) .

لدينا $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

و منه المستوى (ABC) و الفلكة (S) يتقاطعان في الدائرة (C) التي مركزها $I\left(\frac{29}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-14}{9}\right)$ **و شعاعها** $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

4 ـ تحديد معادلة المستوى (P) المماس للفلكة (S) في النقطة $C(-1,0,1)$.

بما أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(-1,0,1)$ فإن المستوى (P) يمر من النقطة $C(-1,0,1)$

و المتجهة $\overrightarrow{\Omega C}(-4,0,3)$ منظمية عليه ومنه فإن معادلة المستوى (P) تكتب على الشكل : $-4x + 3z + d = 0$

و بما أن النقطة $C(-1,0,1)$ تنتمي إلى المستوى (P) فإن : $-4 \times (-1) + 3 \times 1 + d = 0$

$$4 + 3 + d = 0$$
$$d = -7$$

إذن معادلة المستوى (P) $\quad -4x + 3z - 7 = 0$

5 ـ تحديد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P).

بما أن المستقيم (D) هو تقاطع المستويين (ABC) و (P) فإنه موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ بحيث $\vec{n}$ متجهة منظمية على (ABC)

و $\vec{n}'$ متجهة منظمية على (P) و بما أن $\vec{n}(-1,2,-2)$ و $\vec{n}'(-4,0,3)$

فإن $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$

$$\vec{n} \wedge \vec{n}' = 6\vec{i} + 11\vec{j} + 8\vec{k}$$

و منه المتجهة $\vec{u}(6,11,8)$ موجهة للمستقيم (D) .

و بما أن المستويين (ABC) و (P) يمران من النقطة $C(-1,0,1)$ فإن المستقيم (D) يمر من $C(-1,0,1)$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

و بالتالي $\begin{cases} x=-1+6t \\ y=0+11t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1+8t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

6 – تحديد معادلة للفلكة (S') المماسة للمستوى (ABC) في النقطة A و مركزها ينتمي إلى المستوى $(Q)\, x+y+z=0$.

الفلكة (S') مماسة للمستوى (ABC) في النقطة A إذن مركزها ينتمي إلى المستقيم (Δ) المار من النقطة A

و العمودي على المستوى (ABC) و نعلم أن مركزها ينتمي إلى المستوى (Q)

إذن مركز الفلكة (S') هو تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (Q) .

** لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) :

بما أن (Δ) يمر من النقطة A و عمودي على المستوى (ABC) فإن المتجهة المنظمية على المستوى (ABC) موجهة له ومنه

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$$

** لنحدد نقطة تقاطع (Δ) و (Q) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة التقاطع إذن $\begin{cases} \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases} \\ x+y+z=0 \end{cases}$

و بالتالي $1-t+1+2t+1-2t=0$

$$-t+3=0$$

$$t=3$$

$$\begin{cases} x=1-3=-2 \\ y=1+6=7 \\ z=1-6=-5 \end{cases}$$

و منه فإن مركز الفلكة (S') هو النقطة $\Omega'(-2,7,-5)$.

** لنحدد شعاع الفلكة (S').

الفلكة (S') مركزها $\Omega'(-2,7,-5)$ و تمر من $A(1,1,1)$ إذن شعاعها هو $R'=A\Omega'$.

$$R'=A\Omega'=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-6)^2}=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{79}$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr