

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين :

الجزء الأول :

- نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty, 0[$ بما يلي : $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$.
1 - أحسب الدالة المشتقة للدالة g و نهايات g عند محداث المجال $]-\infty, 0[$ ثم ضع جدول تغييرات الدالة g .
2 - استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0[$.

الجزء الثاني :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} \quad x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) \quad x < 0 \end{array} \right.$$

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

- 1 - أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
ب - بين أن الدالة f متصلة في 0 .
ج - أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و يسار 0 .
2 - أحسب الدالة المشتقة للدالة f لكل $x \in \mathbb{R}^*$ ثم اعط جدول تغييرات الدالة f .
3 - ليكن (Cf) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
أ - بين أن (Cf) يقبل نقطة انعطاف أفصولها سالب .
ب - ادرس الفروع اللانهائية .
ج - أنشئ (Cf) .

الحل :

الجزء الأول :

- 1 - الدالة g معرفة على الشكل : $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$ في المجال $]-\infty, 0[$.

$$g'(x) = (x + 1 + \ln(-x))' = 1 + (\ln(-x))' = 1 + \frac{-1}{-x} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

*** إشارة $g'(x)$:
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

*** نحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t + 1 + \ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(-1 + \frac{1}{t} + \frac{\ln(t)}{t} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 + \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} -t + 1 + \ln(t) = -\infty$$

*** جدول تغييرات الدالة g

x	$-\infty$	-1	0
g'		$+$	$-$
g	$-\infty$	0	$-\infty$

- 2 - ** بما أن الدالة g تزايدية على المجال $]-\infty, -1[$ فإنه إذا كان $x \leq -1$ فإن $g(x) \leq g(-1)$ ومنه $g(x) \leq 0$.
بما أن الدالة g تناقصية على المجال $]-1, 0[$ فإنه إذا كان $x \geq -1$ فإن $g(x) \leq g(-1)$ ومنه $g(x) \leq 0$.
و بالتالي $g(x) \leq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0[$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

$$1 - \text{الدالة } f \text{ معرفة على الشكل : } \begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} & x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \text{ في } \mathbb{R} .$$

أ - لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = 1 \quad **$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - 2t \ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left(1 - 2 \frac{\ln(t)}{t}\right) = +\infty \quad **$$

ب - لنبين أن الدالة f متصلة في 0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 - 2t \ln(t) = 0 = f(0) \quad **$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = 0 = f(0) \quad **$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ إذن f متصلة في 0 .

ج - لندرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و يسار 0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1} \times \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2(x+1)}} = +\infty \quad **$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ فإن (Cf) يقبل نصف مماس عمودي باتجاه الأعلى معادلته $x = 0$ في النقطة O .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 \ln(-x) = -\infty \quad **$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ فإن (Cf) يقبل نصف مماس عمودي باتجاه الأعلى معادلته $x = 0$ في النقطة O .

2 - ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = (x^2 + 2x \ln(-x))' = 2x + 2 \left(\ln(-x) + x \times \frac{1}{x} \right) = 2x + 2 + 2 \ln(-x) \quad \text{فإن } x < 0 \text{ : } **$$

$$f'(x) = 2x + 2 + 2 \ln(-x) = 2(x + 1 + \ln(-x)) = 2g(x) \quad \text{ومنه}$$

و بما أن $g(x) \leq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0[$ حسب السؤال 2 فإن $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0[$.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} \right)' = \left(\left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \times \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{1}{3}-1} \times \left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2} \right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-\frac{2}{3}} \times \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) \quad \text{فإن } x > 0 \text{ : } **$$

ومنه فإن $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in]0, +\infty[$.

** جدول تغييرات الدالة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$-$	$+$
f	$+\infty$	0	1

3 - أ - لنبين أن (Cf) يقبل نقطة انعطاف أفصولها سالب .

ليكن $x \in]-\infty, 0[$.

$$f''(x) = (x^2 + 2x \ln(-x))'' = (2x + 2 + 2 \ln(-x))' = 2 + 2 \times \frac{1}{x} = 2 + \frac{2}{x} = \frac{2x+2}{x}$$

$$f''(-1) = 0 \text{ لدينا و } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

إذن (Cf) يقبل نقطة انعطاف $A(-1, 0)$.

ب - لندرس الفروع اللانهائية :

*** لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ إذن (Cf) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $y=1$.

*** لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. لنحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t + 2 \ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(-1 + 2 \frac{\ln(t)}{t} \right) = -\infty$$

ومنه (Cf) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأرتيب بجوار $-\infty$.

ج - إنشاء (Cf) .



