Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين رقم 1 :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{6+U_n} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

1 – بين أن : $\forall n\in\mathbb{N};0<U_n<3$.

2 – لتكن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المتتالية العددية المعرفة على الشكل :** $\forall n\in\mathbb{N};V_n = 3-U_n$.

أ – بين أن : $\forall n\in\mathbb{N};0<V_{n+1}<\frac{1}{3}V_n$.

ب – استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N};\ V_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

ج – أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ **، ثم استنتج أن** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متقاربة و أحسب نهايتها .**

تصحيح التمرين رقم 1 :

المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة على الشكل : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{6+U_n} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

1 – للبرهان أن : $\forall n\in\mathbb{N};0<U_n<3$ نستعمل البرهان بالترجع .

** لدينا $0<U_0=2<3$ (صحة العبارة بالنسبة لأول حد U_0) .

** ليكن $n\in\mathbb{N}$:

نفترض أن $0<U_n<3$ لنبين أن : $0<U_{n+1}<3$.

لدينا : $0<U_n<3$ إذن $6<6+U_n<9$ ومنه $\sqrt{6}<\sqrt{6+U_n}<\sqrt{9}$ و بالتالي $\sqrt{6}<U_{n+1}<3$ نستنتج ان $0<U_{n+1}<3$.

و بالتالي حسب الاستدلال بالترجع فإن : $\forall n\in\mathbb{N};0<U_n<3$.

2 – لتكن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة على الشكل : $\forall n\in\mathbb{N};V_n = 3-U_n$

أ – لنبين أن : $\forall n\in\mathbb{N};0<V_{n+1}<\frac{1}{3}V_n$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

** لدينا : $V_{n+1}=3-U_{n+1}$ و نعلم أن $U_{n+1}<3$ إذن $0<V_{n+1}$.

** لدينا

$$V_{n+1}-\frac{1}{3}V_n = \left(3-U_{n+1}\right)-\frac{1}{3}\left(3-U_n\right)$$

$$= 3-U_{n+1}-1+\frac{U_n}{3} = 2-\sqrt{6+U_n}+\frac{U_n}{3}$$

$$= \frac{6+U_n-3\sqrt{6+U_n}}{3}$$

$$= \frac{\left(6+U_n-3\sqrt{6+U_n}\right)\left(6+U_n+3\sqrt{6+U_n}\right)}{3\left(6+U_n+3\sqrt{6+U_n}\right)}$$

$$= \frac{\left(6+U_n\right)^2-\left(3\sqrt{6+U_n}\right)^2}{3\left(6+U_n+3\sqrt{6+U_n}\right)}$$

$$= \frac{36+12U_n+U_n^2-9\left(6+U_n\right)}{3\left(6+U_n+3\sqrt{6+U_n}\right)}$$

$$= \frac{36+12U_n+U_n^2-54-9U_n}{3\left(6+U_n+3\sqrt{6+U_n}\right)} = \frac{U_n^2+3U_n-18}{3\left(6+U_n+3\sqrt{6+U_n}\right)}$$

باستعمال المميز نعمل الحدودية

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

$$= \frac{(U_n-3)(U_n+6)}{3\left(6+U_n+3\sqrt{6+U_n}\right)} < 0$$ لأن $\forall n\in\mathbb{N};0<U_n<3$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N};0<V_{n+1}<\frac{1}{3}V_n$.

ب ـ لنستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N};\quad V_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا : $\forall n\in\mathbb{N};0<V_{n+1}<\frac{1}{3}V_n$ حسب السؤال السابق

ومنه : $0<V_n<\frac{1}{3}V_{n-1}$ و $0<V_{n-1}<\frac{1}{3}V_{n-2}$ و .... و $0<V_2<\frac{1}{3}V_1$ و $0<V_1<\frac{1}{3}V_0$.

بعملية ضرب نستنتج أن : $0<V_n\times V_{n-1}\times.....\times V_2\times V_1<\frac{1}{3}V_{n-1}\times\frac{1}{3}V_{n-2}\times......\times\frac{1}{3}V_1\times\frac{1}{3}V_0$

ثم نختزل فنحصل على : $0<V_n<\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times......\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}V_0$ ومنه $0<V_n<\left(\frac{1}{3}\right)^nV_0$ و بالتالي : $0<V_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$ لأن $V_0=1$.

ج ـ ** بما أن : $0<V_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ لأن $0<\frac{1}{3}<1$.

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$.

** لدينا : $U_{n+1}-U_n=\sqrt{6+U_n}-U_n=\frac{\left(\sqrt{6+U_n}-U_n\right)\left(\sqrt{6+U_n}+U_n\right)}{\sqrt{6+U_n}+U_n}=\frac{6+U_n-U_n^{\,2}}{\sqrt{6+U_n}+U_n}=-\frac{(U_n+2)(U_n-3)}{\sqrt{6+U_n}+U_n}>0$

لأن $0<U_n<3$

ومنه $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة بالعدد 3 إذن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

** لدينا $\forall n\in\mathbb{N};V_n=3-U_n$ إذن $\forall n\in\mathbb{N};U_n=3-V_n$ ونعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=3$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين رقم 2 :

1 ـ نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة التالية : $(E):\quad z^3-12z^2+48z-128=0$

أ ـ تحقق أن العدد 8 حل للمعادلة (E) .

ب ـ حدد الأعداد العقدية α **و** β **و** γ **بحيث يكون :** $z^3-12z^2+48z-128=(z-8)\left(\alpha z^2+\beta z+\gamma\right)$: $\forall z\in\mathbb{C}$.

ج ـ حل المعادلة (E) .

2 ـ في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

نعتبر النقط A **و** B **و** C **التي ألحاقها على التوالي هي :** $a=2-2i\sqrt{3}$ و $b=2+2i\sqrt{3}$ و $c=8$.

أ ـ حدد الشكل المثلثي للعدد a **ثم أنشئ النقط** A **و** B **و** C .

ب ـ حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي $q=\frac{a-c}{b-c}$ **ثم استنتج طبيعة المثلث** ABC .

تصحيح التمرين رقم 2 :

1 ـ أ ـ لدينا : $8^3-12\times8^2+48\times8-128=512-768+384-128=896-896=0$

إذن العدد 8 حل للمعادلة (E) .

ب ـ لدينا : $(z-8)\left(\alpha z^2+\beta z+\gamma\right)=\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z-8\alpha z^2-8\beta z-8\gamma$

$$=\alpha z^3+(\beta-8\alpha)z^2+(\gamma-8\beta)z-8\gamma$$

و بما أن : $z^3-12z^2+48z-128=(z-8)\left(\alpha z^2+\beta z+\gamma\right)$ فإن : $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta-8\alpha=-12\\ \gamma-8\beta=48\\ -8\gamma=-128\end{cases}$ (معاملات الحدود متساوية)

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

ومنه $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta-8=-12\\ \gamma-8\beta=48\\ \gamma=\dfrac{-128}{-8}=16\end{cases}$ و بالتالي $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-12+8=-4\\ 16-8\beta=48\\ \gamma=\dfrac{-128}{-8}=16\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-4\\ \gamma=16\end{cases}$

ومنه : $z^3-12z^2+48z-128=(z-8)(z^2-4z+16)$.

ج – لدينا : $z^3-12z^2+48z-128=0 \Leftrightarrow (z-8)(z^2-4z+16)=0$

$z-8=0$ أو $z^2-4z+16=0$

** لنحل المعادلة : $z^2-4z+16=0$.

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times16=16-64=-48=-\left(4\sqrt{3}\right)^2=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$$

المعادلة تقبل حلين مختلفين هما : $z_1=\dfrac{4+4i\sqrt{3}}{2}=2+2i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{4-4i\sqrt{3}}{2}=2-2i\sqrt{3}$

إذن حلول المعادلة (E) : هي الأعداد 8 و $2+2i\sqrt{3}$ و $2-2i\sqrt{3}$.

2 – في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2-2i\sqrt{3}$ و $b=2+2i\sqrt{3}$ و $c=8$.

أ – الشكل المثلثي للعدد a .

لدينا : $a=2-2i\sqrt{3}$.

** لنحدد معيار العدد a .

$$|a|=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

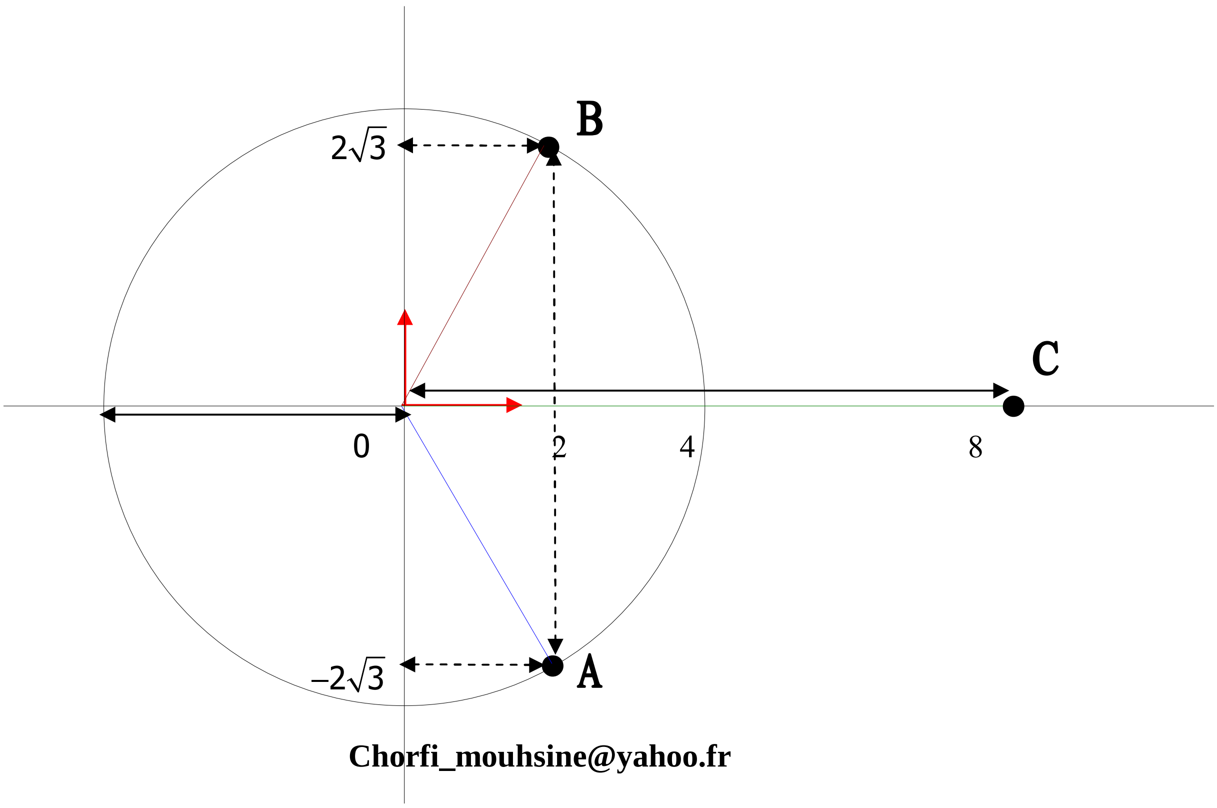
Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

** لنحدد عمدة العدد a .

$$a=2-2i\sqrt{3}=4\left(\frac{2}{4}-\frac{2i\sqrt{3}}{4}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

و منه : $a=\left[4,-\dfrac{\pi}{3}\right]$



Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

ب ـ لنحدد الشكل المثلثي للعدد $q=\frac{a-c}{b-c}$.

لدينا :
$$q=\frac{a-c}{b-c}=\frac{2-2i\sqrt{3}-8}{2+2i\sqrt{3}-8}=\frac{-6-2i\sqrt{3}}{-6+2i\sqrt{3}}=\frac{6+2i\sqrt{3}}{6-2i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(6+2i\sqrt{3}\right)\left(6+2i\sqrt{3}\right)}{\left(6-2i\sqrt{3}\right)\left(6+2i\sqrt{3}\right)}=\frac{36+12i\sqrt{3}+12i\sqrt{3}-12}{36+12}=\frac{24+24i\sqrt{3}}{48}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن $q=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$ ومنه المثلث ABC متساوي الأضلاع .

تمرين رقم 3 :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, النقط $A\left(2,1,2\right)$ و $B\left(3,0,-2\right)$ و $C\left(1,-1,1\right)$

و المستوى $\left(P\right)$ الذي معادلته : $x-y+3=0$.

1 ـ أ ـ أحسب مسافة النقطة $\Omega\left(1,0,1\right)$ عن المستوى $\left(P\right)$.

ب ـ استنتج أن معادلة ديكارتية للفلكة $\left(S\right)$ التي مركزها $\Omega\left(1,0,1\right)$ و المماسة للمستوى $\left(P\right)$ هي :
$$x^2+y^2+z^2-2x-2z-6=0$$

2 ـ أ ـ أحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب ـ بين أن : $-7x+5y-3z+15=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(ABC\right)$.

3 ـ أ ـ بين أن المستويين $\left(ABC\right)$ و $\left(P\right)$ متقاطعان وفق مستقيم $\left(\Delta\right)$.

ب ـ حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم $\left(\Delta\right)$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تصحيح التمرين رقم 3 :

1 ـ أ ـ
$$d\left(\Omega,\left(P\right)\right)=\frac{\left|1-0+3\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

ب ـ بما ان الفلكة $\left(S\right)$ مركزها $\Omega\left(1,0,1\right)$ ومماسة للمستوى $\left(P\right)$ فإن الفلكة مركزها $\Omega\left(1,0,1\right)$

و شعاعها $R=d\left(\Omega,\left(P\right)\right)=2\sqrt{2}$

ومنه معادلة الفلكة $\left(S\right)$ هي : $\left(x-1\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z-1\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$

ومنه $x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1=8$

وبالتالي $x^2+y^2+z^2-2x-2z-6=0$

2 ـ أ ـ ** لدينا : $\overrightarrow{AB}\left(1,-1,-4\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-1,-2,-1\right)$.

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-1&-4\\-2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-4\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{k}=-7\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$

ومنه $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(-7,5,-3\right)$

** بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتان ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب ـ المستوى $\left(ABC\right)$ يمر من النقطة A و المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(-7,5,-3\right)$ منظمية عليه .

إذن معادلة المستوى $\left(ABC\right)$ تكتب على الشكل : $-7x+5y-3z+d=0$.

و بما أن النقطة $A\left(2,1,2\right)$ تنتمي إلى المستوى $\left(ABC\right)$ فإن : $-7\times2+5\times1-3\times2+d=0$

ومنه $-14+5-6+d=0$

إذن $d=15$

ومنه معادلة المستوى $\left(ABC\right)$ هي : $-7x+5y-3z+15=0$

3 ـ أ ـ لدينا المتجهة $\vec{n}\left(1,-1,0\right)$ منظمية على $\left(P\right)$ و $\vec{n}'\left(-7,5,-3\right)$ منظمية على $\left(ABC\right)$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

و لدينا : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ إذن المتجهتان $\vec{n}(1,-1,0)$ و $\vec{n}'(-7,5,-3)$ غير مستقيميتان

ومنه المستويين (P) و (ABC) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

ب ـ لتحديد تمثيل بارامتري لمستقيم نحتاج إلى نقطة و متجهة موجهة .

** لتحديد نقطة تنتمي إلى المستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC) الذي معادلتيه على الشكل : $\begin{cases} -7x+5y-3z+15=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$

نعطي قيمة لـ x في المعادلتين $-7x+5y-3z+15=0$ و $x-y+3=0$ و نبحث عن المجهولين الآخرين .

نعوض x بـ 0 نحصل على $\begin{cases} 5y-3z+15=0 \\ -y+3=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 5\times 3-3z+15=0 \\ y=3 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} z=10 \\ y=3 \end{cases}$.

ومنه $(0,3,10)$ إحداثيات نقطة تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

** لتحديد متجهة موجهة $\vec{u}$ للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC)

نضع : $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}\vec{k} = 3\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$

ومنه التمثيل المبياني للمستقيم (Δ) هو $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x=3t \\ y=3+3t \\ z=10-2t \end{cases}$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين رقم 4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1 ـ أ ـ بين أن $f(-x)+f(x)=2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ثم استنتج أن (C_f) يقبل مركز تماثل A ينبغي تحديد زوج إحداثيتيه .

ب ـ أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (يمكنك وضع $t=e^x$) , ثم استنتج أن (C_f) يقبل مقاربين ينبغي تحديد معادلتيهما .

ج ـ أحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$, ثم ضع جدول تغييرات الدالة f على حيز تعريفها .

2 ـ أ ـ حدد معادلة ديكارتية للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها 0.

ب ـ لتكن φ الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x) = f(x)-(x+1)$.

بين أن : $\varphi'(x) = -\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ و استنتج تغييرات الدالة φ ثم حدد إشارتها (أحسب $\varphi(0)$) .

ج ـ استنتج مما سبق الوضع النسبي لـ (C_f) و المماس (T) .

3 ـ أنشئ (C_f) و (T) و مقاربيه .

تصحيح التمرين رقم 4 :

1 ـ أ ـ ليكن $x \in \mathbb{R}$, لدينا : $f(-x)+f(x) = \dfrac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1} + \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{\frac{3}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} + \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{\frac{3-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} + \dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

$$\frac{3-e^x}{1+e^x} + \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = 2$$

بما أن : $f(-x)+f(x)=2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ فإن : $f(-x) = 2-f(x)$ و منه $f(2\times 0-x) = 2\times 1 - f(x)$

(مركز التماثل $f(2a-x) = 2b-f(x)$)

و منه (C_f) يقبل النقطة $A(0,1)$ كمركز للتماثل .

ب ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{3t-1}{t+1} = 3$ (نضع $t=e^x$ إذا كان $x\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$)

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{3t-1}{t+1} = -1$ (نضع $t = e^x$ إذا كان $x \to -\infty$ فإن $t \to 0$)

نستنتج أن (C_f) يقبل مقاربين أفقيين الأول معادلته $y = 3$ بجوار $+\infty$ و الثاني معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$.

ج ـ لدينا : $f(x) = \dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right)' = \frac{(3e^x-1)'(e^x+1)-(3e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^{2x}+3e^x-3e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

نستنتج أن $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1 \nearrow 3$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

2 ـ أ ـ معادلة المماس ل (T) لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها 0.

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

$y = x+1$ ($f(0)=1$ و $f'(0)=1$)

ب ـ لدينا : $\varphi(x) = f(x)-(x+1)$

*** ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = f'(x)-(x+1)' = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}-1 = \frac{4e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{4e^x-e^{2x}-2e^x-1}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x+1)^2} = -\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2} = -\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} = -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

إذن $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = -\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

***

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$\varphi'(x)$	—
$\varphi(x)$	$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$

***

انطلاقا من جدول تغييرات الدالة φ نستنتج أن :

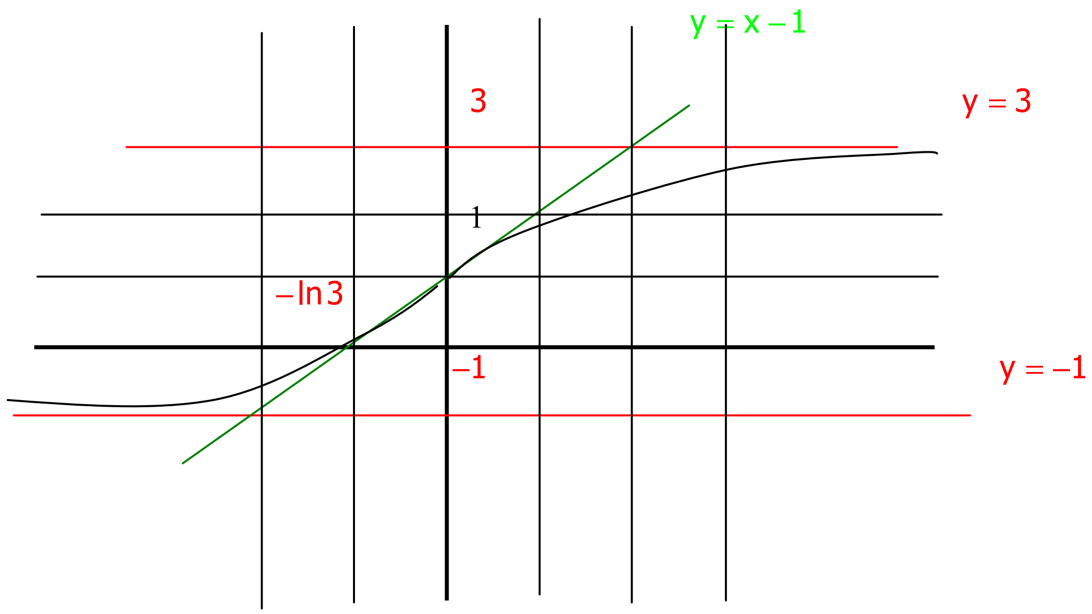
$\varphi(x) \le 0$ في المجال $[0,+\infty[$ و $\varphi(x) \ge 0$ في المجال $]-\infty,0]$.

***

بما أن $\varphi(x) \le 0$ في المجال $[0,+\infty[$ و $\varphi(x) = f(x)-(x+1)$ **إذن** $f(x) \le x+1$ ومنه (C_f) تحت المستقيم (T)

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

بما أن $\varphi(x)\geq 0$ في المجال $]-\infty,0]$. و $\varphi(x)=f(x)-(x+1)$ إذن $f(x)\geq x+1$ ومنه (C_f) تحت المستقيم (T)



Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

<u>تمرين رقم 5 :</u>

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $g(x)=\dfrac{-x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$.

1 ـ حدد D_g .

2 ـ أدرس تغييرات الدالة g .

3 ـ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=\dfrac{-x}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_g) ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_g) و (D) .

4 ـ بين أن $I\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{4}\right)$ مركز تماثل (C_g) .

5 ـ إعط معادلة المماس (T_I) لـ (C_g) في I .

6 ـ أ ـ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا x_0 بحيث $\dfrac{2}{5}<x_0<\dfrac{9}{20}$.

ب ـ أنشئ (C_g) .

($\ln 2\approx 0{,}693$ و $\ln 3\approx 1{,}099$ و $\ln 11\approx 2{,}398$)

<u>تصحيح التمرين رقم 5 :</u>

1 ـ لنحدد D_g .

$$x\in D_g \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right|>0 \text{ و } x\neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\neq 0 \text{ و } x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \text{ و } x\neq 0$$

إذن $D_g=]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

2 ـ ** نحسب نهايات الدالة g عند محدات D_g .

*** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=0$)

*** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=0$)

*** $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x}{2}=0$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=+\infty$)

*** $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{2}=0$ و $\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=+\infty$)

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

*** $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = -\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{-x}{2} = \frac{-1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to1^+} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = -\infty$)

*** $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = -\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{-x}{2} = \frac{-1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to1^-} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = -\infty$)

** لنحدد الدالة المشتقة للدالة g.

$$g'(x) = \left(\frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)' = \left(\frac{-x}{2}\right)' + \left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)' = \frac{-1}{2} + \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}}$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{\frac{x-(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$$

** لندرس إشارة g' .

بعد تحديد حلول المعادلتين : $-x^2+x+2=0$ و $2x(x-1)=0$.

نضع جدول الإشارة :

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x(x-1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

** نضع جدول تغييرات الدالة g .

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3 ـ ** لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - \left(\frac{-x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) + \frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y = \frac{-x}{2}$ مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$.

** لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) - \left(\frac{-x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) + \frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{-x}{2}$ مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $-\infty$.

** لندرس الوضع النسبي لـ (C_g) بالنسبة لـ (D) .

لدينا : $g(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

*** لنحل المعادلة : $g(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=0$:

لدينا : $g(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=0\Leftrightarrow\left|\frac{x-1}{x}\right|=1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}=1$ أو $\frac{x-1}{x}=-1$

$\Leftrightarrow x-1=x$ أو $x-1=-x$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

*** إذا كان : $\frac{1}{2}<x$ فإن $0<\frac{1}{x}<2$ ومنه $-2<-\frac{1}{x}<0$ و بالتالي $-1<1-\frac{1}{x}<1$ إذن $\left|1-\frac{1}{x}\right|<1$

و بالتالي : $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|<0$ بمعنى أنه في المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$: (C_g) تحت (D)

*** إذا كان : $0<x<\frac{1}{2}$ فإن $\frac{1}{x}>2$ ومنه $-\frac{1}{x}<-2$ و بالتالي $1-\frac{1}{x}<-1$ إذن $\left|1-\frac{1}{x}\right|>1$

و بالتالي : $\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|>0$ بمعنى أنه في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$: (C_g) فوق (D).

*** إذا كان : $x<0$ فإن $\frac{1}{x}<0$ و منه $-\frac{1}{x}>0$ و بالتالي $1-\frac{1}{x}>1$ إذن $\left|1-\frac{1}{x}\right|>1$

و بالتالي : $\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|>0$ بمعنى أنه في المجال $]-\infty,0[$: (C_g) فوق (D).

4 ـ بين أن $I\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ مركز تماثل (C_g) .

ليكن $x\in D_g$, لدينا : $g\left(2\times\frac{1}{2}-x\right)=g(1-x)=-\frac{1-x}{2}+\ln\left|\frac{(1-x)-1}{1-x}\right|=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|$

$=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=2\times\frac{-1}{4}-\left(\frac{-x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)=2\times\frac{-1}{4}-g(x)$

بما أن : $g\left(2\times\frac{1}{2}-x\right)=2\times\frac{-1}{4}-g(x)$ فإن $I\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ مركز تماثل (C_g) .

5 ـ لنحدد معادلة المماس (T_I) لـ (C_g) في I.

معادلة المماس (T_I) لـ (C_g) في I تكتب على الشكل : $y=g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)$.

و بما أن : $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{4}$ و $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-9}{2}$ فإن : $y=\frac{-9}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}$

ومنه $y=\frac{-9x}{2}+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}$

$y=\frac{-9x}{2}+2$

6 ـ أ ـ لنبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا x_0 بحيث $\frac{2}{5}<x_0<\frac{9}{20}$.

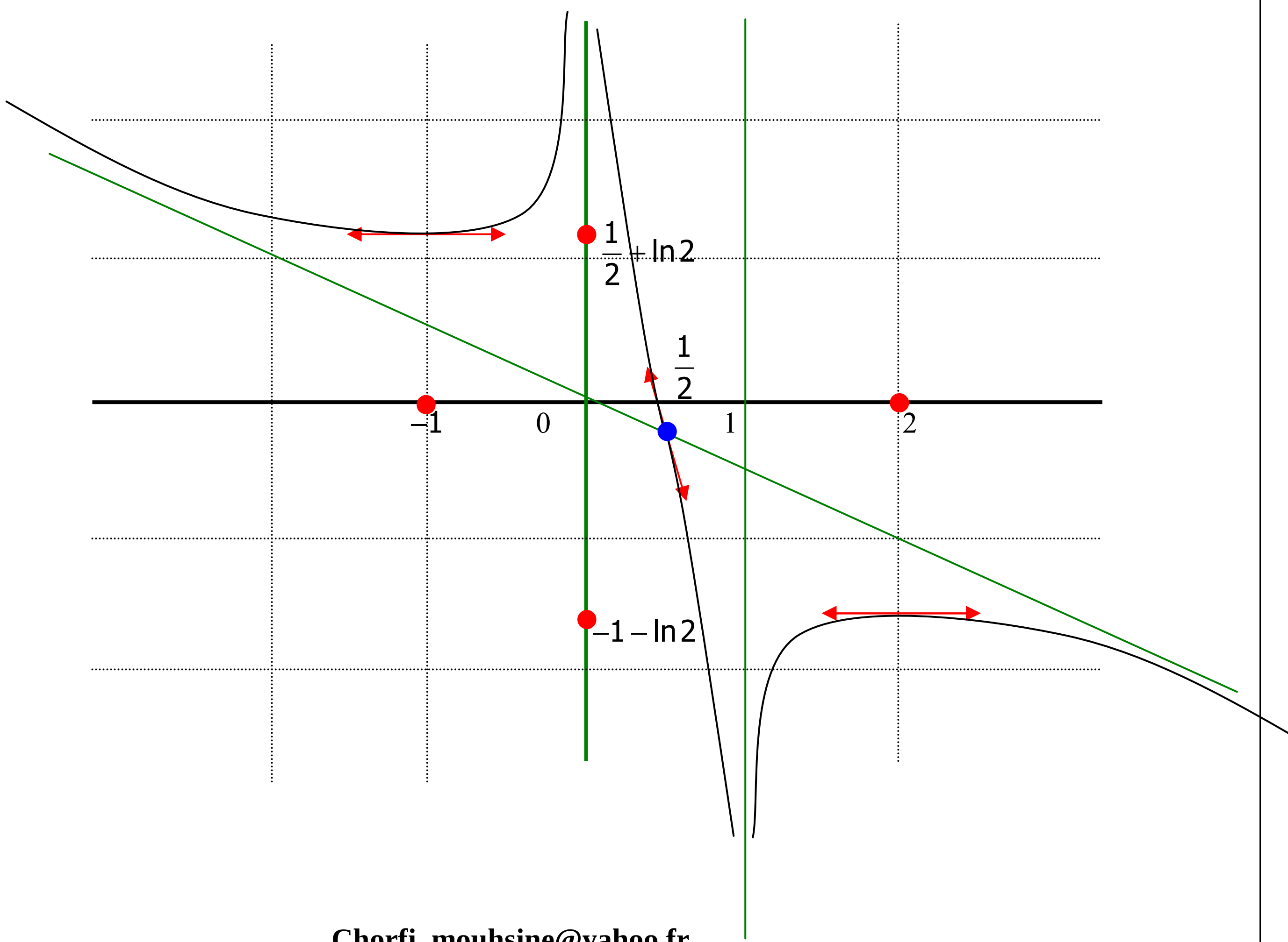
لدينا الدالة g متصلة و تناقصية على المجال $\left[\frac{2}{5},\frac{9}{20}\right]$

و لدينا : $g\left(\frac{2}{5}\right)\approx 0,206$ و $g\left(\frac{9}{20}\right)\approx -0,025$ بمعنى ان $g\left(\frac{2}{5}\right)\times g\left(\frac{9}{20}\right)<0$

ومنه فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا x_0 بحيث $\frac{2}{5}<x_0<\frac{9}{20}$.

ب –

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr



Chorfi_mouhsine@yahoo.fr