عناصر الإجابة وسلم التنقيط

سلم التنقيط

التمرين الأول:

1) ديد العناصرا ميزة للفلكة (S)

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=3$$
$$\Leftrightarrow M(x,y,z)\in S\left(\Omega(1,0,2);r=\sqrt{3}\right)$$

1,25

إذن الفلكة S مركزها $\Omega(1,0,2)$ وشعاعها $r=\sqrt{3}$

لدينا $\overrightarrow{\Omega A}(-1,1,-1)$ إذن $\Omega A=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}=r$ ومنه $A\in(S)$

2) لدينا $\overrightarrow{OA}(0,-1,1)$ و $\overrightarrow{OB}(1,-1,0)$ إذن

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

1,25

ديد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

$$M(x,y,z)\in(OAB)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x+y+z=0$$

ومنه $(OAB):\ x+y+z=0$

3) لدينا $d(\Omega,(OAB))=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=r$ إذن (OAB) اس للفلكة (S)

0,5

و ا أن النقطة A مشتركة بـ الفلكة (S) و ا ستوى (OAB) فإن (OAB) اس للفلكة (S) النقطة A .

التمرين الثاني:

1) لنحل ا موعة $\mathbb{C}$ ا عادلة : $z^2-6z+34=0$

لتكن S موعة حلول ا عادلة $z^2-6z+34=0$

1

لدينا : $\Delta'=9-34=-25=(5i)^2$

$z_1=3-5i$ و $z_2=3+5i$ إذن $S=\{3+5i\ ;\ 3-5i\}$

2) لتكن $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالإزاحة T ذات ا تجهة $\vec{u}$ ال قها $4-2i$.

أ-لنحدد التمثيل العقدي للإزاحة T .

$$T(M)=M'\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$$
$$\Leftrightarrow Aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=Aff\left(\vec{u}\right)$$
$$\Leftrightarrow z'-z=4-2i$$
$$\Leftrightarrow z'=z+4-2i$$

0,75

لتكن $A'(z')$ صورة $A(3+5i)$ باللإزاحة T إذن $z'=3+5i+4-2i=7+3i=c$

إذن $A'=C$ ومنه C صورة A بالإزاحة T .

ب- $\frac{b-c}{a-c}=\frac{3-5i-7-3i}{3+5i-7-3i}=\frac{-4-8i}{-4+2i}=\frac{2i(-4+2i)}{-4+2i}=2i$ 0,5

ج- من السؤال 2-ب- نستنتج أن $\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|2i|$ و $\text{Arg}\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv \text{Arg}(2i)[2\pi]$

أي $\frac{|b-c|}{|a-c|}=2$ و $\text{Arg}\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ومنه $BC=2.AC$ و $\overline{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ 0,75

نتيجة: ا ثلث ABC قائم الزاوية C و $BC=2.AC$.

<u>التمرين الثالث:</u>

1) نسحب عشوائيا و آن واحد ثلاث كرات من الصندوق:

لدينا Ω موعة التأليفات لثلاث عناصر من ا موعة ا كونة من 9 كرات. إذن

$$\text{card}\,\Omega=C_9^3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

أ- ا دث A : "سحب كرت راوين وكرة خضراء"

لدينا ا دث A قق إذا اختيار كرت راوين وذلك بـ C_6^2 كيفية تلفة وكرة خضراء وذلك بـ C_3^1 1

كيفية تلفة إذن $p(A)=\frac{C_6^2\times C_3^1}{C_9^3}=\frac{15\times3}{84}=\frac{15}{28}$

ب- ا دث B "سحب كرة واحدة خضراء على الأقل"

لدينا ا دث $\overline{B}$: "سحب 3 كرات راء" 1

ا دث $\overline{B}$ قق إذا اختيار 3 كرات راء وذلك بـ C_6^3 كيفية تلفة

إذن $p(\overline{B})=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{5\times4}{84}=\frac{5}{21}$ ومنه $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$

2) نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق

لدينا Ω موعة الترتيبات بدون تكرار لثلاثةعناصر من بـ 9 إذن $\text{card}\ \Omega=A_9^3=9\times8\times7=504$ 1

ا دث R "سحب ثلاث كرات راء"

ا دث R قق إذا اختيار 3 كرات راء بالتتابع وذلك بـ: A_6^3 كيفية تلفة.

ومنه $p(R)=\frac{A_6^3}{A_9^3}=\frac{6\times5\times4}{9\times8\times7}=\frac{5}{21}$

<u>المسألة:</u>

I) لدينا g دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ ا يلي: $g(x)=x-2\,\ell nx$

1) أ- لدينا g قابلة للإشتقاق عل $]0,+\infty[$ و $(\forall x\in]0,+\infty[)\ \ g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$ 0,5

ب- ا أن x موجب قطعا فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-2$.

جدول تغ ات الدالة g

x	0		2		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	
تغ ات g	$+\infty$	$\searrow$	$2-\ell n4$	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

2) من جدول تغ ات g نستنتج: $g(x)\geq g(2)\quad \forall x\in]0,+\infty[$ ولدينا $g(2)=2-2\ell n2>0$ 0,5

إذن $g(x)>0\quad \forall x\in]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x-(\ell nx)^2$

1) لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-(\ell nx)^2=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+}\ell nx=-\infty$ 0,75

التأويل الهندسي: المستقيم $(D):\ x=0$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

2) أ- نضع $t=\sqrt{x}$ حيث $x>0$. لما يؤول x إلى $+\infty$ فإن t يؤول إلى $+\infty$. 0,5

لدينا $\dfrac{(\ell nx)^2}{x}=\dfrac{(\ell nt^2)^2}{t^2}=\dfrac{(2\ell nt)^2}{t^2}=4.\left(\dfrac{\ell nt}{t}\right)^2$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ell nx)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}4.\left(\dfrac{\ell nt}{t}\right)^2=0$

ب-استنتاج: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-(\ell nx)^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{(\ell nx)^2}{x}\right)=+\infty$ 0,75

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-(\ell nx)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-\dfrac{(\ell nx)^2}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{(\ell nx)^2}{x}=1$

ج- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-(\ell nx)^2=-\infty$ 0,5

إذن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$. 0,25

د-ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا $f(x)-x=-(\ell nx)^2\leq 0$ إذن $(\mathscr{C}_f)$ يوجد تحت المستقيم (Δ).

3) أ-ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا $f'(x)=1-2\ell nx.\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-2\ell nx}{x}=\dfrac{g(x)}{x}$ إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}\quad (\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ 0,75

من السؤال I- 2) نستنتج: $f'(x)>0\quad \forall x\in]0,+\infty[$ ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

ب-جدول تغ ات f:

0,25

x	0	$+\infty$
اشارة $f'(x)$		+
تغ ات f	$-\infty$	$+\infty$

0,5

ج-معادلة ا ماس للمنح $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة اا أفصو ا 1 :

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$ و ا أن $f'(1)=1$ و $f(1)=1$ 0,5

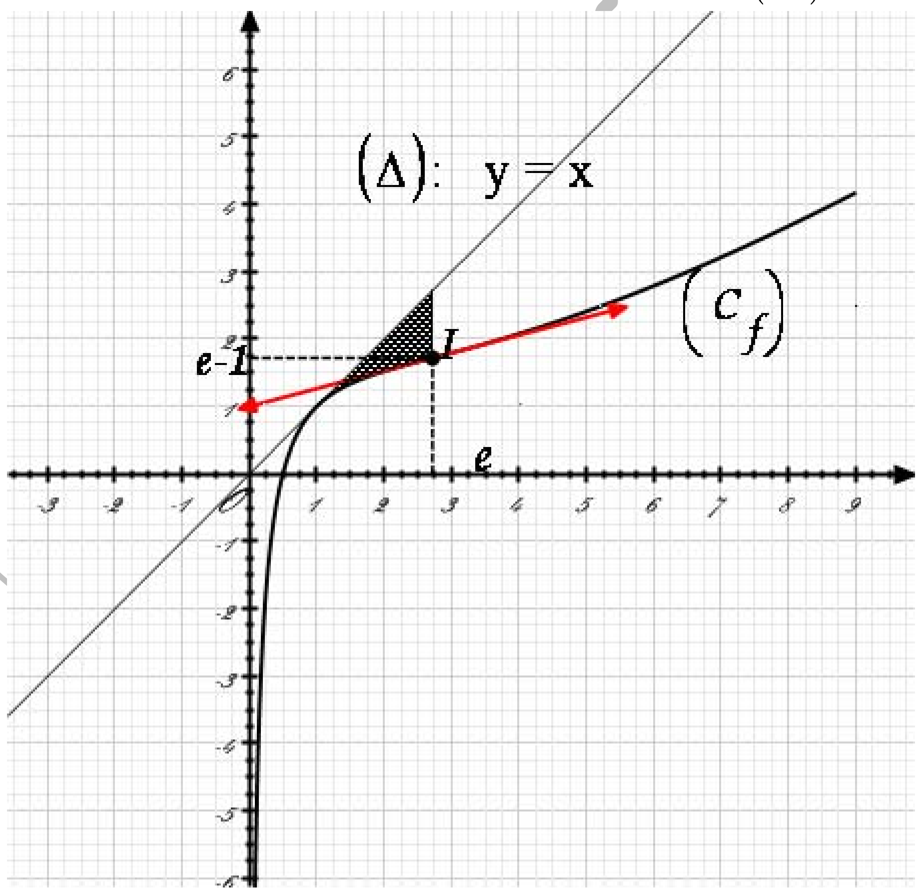
فإن معادلة ا ماس عند النقطة اا أفصو ا 1 هي $y=x$: (Δ).

4) لدينا f متصلة وتزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ و $f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$

لدينا $0\in\mathbb{R}$ إذن ا عادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$.

لدينا $f\left(\frac{1}{e}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{e}-1\right)\times\left(\frac{1}{2}-(\ell n2)^2\right)<0$ إذن حسب م هنة القيم الوسيطية $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$

5) انشاء ا نح $(\mathscr{C}_f)$. 1



0,5

6) أ-لدينا $H: x \longrightarrow x\ell nx - x$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولكل x من $]0,+\infty[$

$H'(x)=\ell nx$ ومنه $H: x\longrightarrow x\ell nx - x$ دالة أصلية للدالة $x\longrightarrow \ell nx$ على $]0,+\infty[$. 0,75

وبالتا : $\int_1^e \ell nx\, dx = [x\ell nx - x]_1^e = (e\ell ne - e) - (1\ell n1 - 1) = 1$

ب-حساب التكامل : $\int_1^e (\ell nx)^2 dx$

نضع $u = (\ell nx)^2$ إذن $u' = 2\frac{\ell nx}{x}$

و $v' = 1$ إذن $v = x$ 0,5

وبالتا $\int_1^e (\ell nx)^2 dx = \left[x.(\ell nx)^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ell nx\, dx = e - 2$

ج-لدينا مساحة ا يز ا ستوي ا صور ب ا نحـ $(\mathscr{C}_f)$ وا ستقيم $(\Delta) : y = x$ وا ستقيم اللذين

معادلتا ا $x = 1$ و $x = e$ هي : $A = \int_1^e x - \left(x - (\ell nx)^2\right) dx \times U.A$

ا أن $\int_1^e x - \left(x - (\ell nx)^2\right) dx = \int_1^e (\ell nx)^2 dx = e - 2$ فإن $A = (e-2)\, U.A$

III) نعتـ ا تتالية العددية (u_n) ا عرفة ا يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ 0,75

1) ا أن $u_0 = 2$ فإن $1 \le u_0 \le 2$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $1 \le u_n \le 2$ لنبـ أن $1 \le u_{n+1} \le 2$.

f croissante $\quad 1 \le u_n \le 2 \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(2)$

$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le 2 - (\ell n2)^2$ 0,5

$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le 2 \quad car \quad 2 - (\ell n2)^2 \le 2$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; 1 \le u_n \le 2$

2) لدينا $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) \le x$ إذن $\forall x \in [1,2] \quad f(x) \le x$

و ا أن $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; 1 \le u_n \le 2$ فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) \le u_n$ يعـ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \le u_n$ 0,75

ومنه ا تتالية (u_n) تناقصية .

3) (u_n) تناقصية ومصغورة إذن (u_n) متقاربة

لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f([1,2]) \subset [1,2]$ و f متصلة على $[1,2]$ و(u_n)متقاربة

إذن ℓ اية (u_n)حل للمعادلة $f(x) = x \quad x \in [1,2]$

ليكن x من $[1,2]$

$f(x) = x \Leftrightarrow x - (\ell nx)^2 = x \Leftrightarrow (\ell nx)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Etabli par :Skri Mohammed