ثانوية الفتح نيابة الخميسات	تصحيح الفرض المنزلي رقم 03 الدورة الثانية 2006/2005	2 باك ع ت 01 + 2 باك ع ت 02 Prof : BENELKHATIR

تمرين01:

1)- لحساب : $I=\int_1^2\left(9x^2+12x+1\right)\ln x\,dx$

نضع : $u(x)=\ln x$ و $v'(x)=9x^2+12x+1$

إذن : $u'(x)=\frac{1}{x}$ و $v(x)=3x^3+6x^2+x$

و منه فإن :

$$I=\left[\left(3x^3+6x^2+x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(3x^2+6x+1\right)dx$$

$$=\left[\left(3x^3+6x^2+x\right)\ln x-\left(x^3+3x^2+x\right)\right]_1^2$$

و بالتالي : $I=50\ln 2-17$.

- بالنسبة للتكامل : $J=\int_0^{\pi}\left(2x+\pi\right)\sin x\,dx$

لدينا : $J=\left[-\left(2x+\pi\right)\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2\cos x\,dx$

إذن : $J=\left[-\left(2x+\pi\right)\cos x+2\sin x\right]_0^{\pi}=4\pi$

2)- نحسب : $K=\int_{-1}^0\left(2x-1+\frac{2x^2-7x+9}{\left(x-1\right)^3}\right)dx$

لدينا : $K=\left[x^2-x\right]_{-1}^0+\int_{-1}^0\frac{2x^2-7x+9}{\left(x-1\right)^3}dx$

و بما أن: $\frac{2x^2-7x+9}{\left(x-1\right)^3}=\frac{2}{x-1}-\frac{3}{\left(x-1\right)^2}+\frac{4}{\left(x-1\right)^3}$

فإن: $K=\left[x^2-x+2\ln\left|x-1\right|+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{\left(x-1\right)^2}\right]_{-1}^0$

إذن : $K=-\left(5+2\ln 2\right)$.

- بالنسبة للتكامل : $L=\int_0^1\frac{x}{1+x+x^2}dx$

لدينا : $\frac{x}{1+x+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+x+x^2}\right)$

إذن : $L=\left[\ln\sqrt{1+x+x^2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x+x^2}dx$

و بما أن :

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x+x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx$$

فإن :

$$L=\left[\ln\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}Arc\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

و بالتالي : $L=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{2}\ln 3=\frac{9\ln 3-2\pi\sqrt{3}}{18}$.

3)- بوضع $t=e^x$ نحصل على $dx=\frac{1}{t}dt$ ، إذن :

$M=\int_1^e t\ln\left(1+t\right)dt$ ، ثم ننجز مكاملة بالأجزاء :

$$M=\left[\frac{t^2}{2}\ln\left(1+t\right)\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{t^2}{1+t}dt$$

و بما أن : $\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$

فإن : $M=\left[\left(t^2-1\right)\ln\sqrt{1+t}-t^2+\frac{1}{2}t\right]_1^e$

أي أن : $M=\left(e^2-1\right)\ln\sqrt{1+e}-\frac{e^2-2e+1}{4}$

4)- لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^*:\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}$

و بما أن : $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ ، فإن :

$$I_1=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^e$$

إذن : $I_1=\left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^e=\ln\left(e\sqrt{\frac{2}{1+e^2}}\right)$.

- بوضع $t=e^{-x}$ نحصل على $dx=-\frac{dt}{t}$ ، إذن :

$$I_2=\int_e^1\frac{-1}{t^2+2}dt=\sqrt{2}\int_1^e\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt$$

و بالتالي : $I_2=\sqrt{2}\left[Arc\tan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_1^e$.

$$I_2=\sqrt{2}\left(arc\tan\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)-arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

ثانوية الفتح نيابة الخميسات	تصحيح الفرض المنزلي رقم 03 الدورة الثانية 2006/2005	2 باك ع ت 01 + 2 باك ع ت 02 Prof : BENELKHATIR

- بالنسبة للتكامل $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{4-\sin^2 x}dx$ نضع : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ إذن :

$$\begin{cases}\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{cases}$$

فنحصل على : $I_3=\int_0^1\frac{t}{\left(1+t+t^2\right)\left(1-t+t^2\right)}dt$

إذن : $I_3=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1-t+t^2}-\frac{1}{1+t+t^2}\right)dt$

و بالتالي فإن :

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[Arc\tan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)-Arc\tan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

أي أن : $I_3=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

■ تمرين02:

- بالنسبة للحالة : لدينا $(1):\begin{cases}f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\ln x}\\ x_0=e;I=]1,+\infty[\end{cases}$:

$$F(x)=\int_e^x\frac{1}{t}\sqrt{\ln t}\,dt=\int_e^x(\ln t)'\times(\ln t)^{\frac{1}{2}}dt$$

إذن : $F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left[(\ln t)^{\frac{1}{2}+1}\right]_e^x$

و بالتالي : $F(x)=\frac{2}{3}\left(-1+\ln x\sqrt{\ln x}\right)$.

- بالنسبة للحالة : $(2):\begin{cases}f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\\ x_0=1;I=]0,+\infty[\end{cases}$

لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[:F(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$

ننجز مكاملة بالأجزاء فنحصل على :

$$F(x)=\left[\frac{\ln t}{t}\right]_1^x-2\int_1^x\frac{\sqrt{t}}{t}dt$$

إذن : $F(x)=\frac{\ln x}{x}-4\int_1^x\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

أي: $F(x)=\frac{\ln x}{x}-4\left[\sqrt{t}\right]_1^x=\frac{\ln x}{x}-4\left(\sqrt{x}-1\right)$

■ تمرين03:

1)- لحساب التكامل : $u_1=\int_1^e x^2\ln x\,dx$ ، نضع : $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=x^2\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

ومنه فإن : $u_1=\left[\frac{x^3\ln x}{3}\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{3}dx$

أي أن : $u_1=\left[\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}\right]_1^e=\frac{1+2e^3}{9}$

2)- ننجز مكاملة بالأجزاء لحساب التكامل : u_{n+1}

نضع : $\begin{cases}u(x)=(\ln x)^{n+1}\\ v'(x)=x^2\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}u'(x)=\frac{(n+1)\times(\ln x)^n}{x}\\ v(x)=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

ومنه فإن : $u_{n+1}=\left[\frac{x^3(\ln x)^{n+1}}{3}\right]_1^e-\frac{(n+1)}{3}\times u_n$

و بما أن : $\left[\frac{x^3(\ln x)^{n+1}}{3}\right]_1^e=\frac{e^3}{3}$ ، فإن :

$3u_{n+1}+(n+1)u_n=e^3$.

3)- بما أن الدالة : $x\mapsto x^2(\ln x)^n$ موجبة على المجال $[1,e]$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، فإ ن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\int_1^e x^2(\ln x)^n dx\ge 0$$

هذا يعني أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 0 .

بما أن : $\forall x\in[1,e]:0\le\ln x\le 1$

فإن : $\forall x\in[1,e]:x^2(\ln x)^{n+1}\le x^2(\ln x)^n$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*:u_{n+1}\le u_n$

و بالتالي فالمتتالية (u_n) تناقصية .

نيابة الخميسات / ثانوية الفتح	تصحيح الفرض المنزلي رقم 03 / الدورة الثانية 2006/2005	2 باك ع ت 01 + 2 باك ع ت 02 / Prof : BENELKHATIR

نستنتج إذن أن (u_n) متتالية متقاربة ، لأنها تناقصية و مصغورة .

4)- لدينا : $(n+1)u_n \le 3u_{n+1}+(n+1)u_n$ و $3u_{n+1}+(n+1)u_n = e^3$

إذن : $(n+1)u_n \le e^3$ أي أن : $u_n \le \frac{e^3}{n+1}$

و بالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \le u_n \le \frac{e^3}{n+1}$

و حيث أن (u_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

■ **مسألة:**

1)- أ- الدالة : $g : x \mapsto 1+(x-1)e^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا : $\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = xe^x$.

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} : sg\left[g'(x)\right] = sg(x)$

و بالتالي فالدالة g تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ و تناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0]$ ، و جدول تغيراتها كالآتي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g		↘	0	↗	

ب- من خلال جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \ge g(0) = 0$$

و بالتالي فالدالة g موجبة على المجموعة $\mathbb{R}$.

2)- أ- نضع : $\begin{cases} u(t) = x-t \\ v'(t) = e^t \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(t) = -1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$

ومنه فإن : $I(x) = \left[(x-t)e^t\right]_0^x + \int_0^x e^t dt$

أي أن : $I(x) = \left[(x-t)e^t + e^t\right]_0^x = e^x-(1+x)$

ب- ليكن x من $\mathbb{R}^+$ ، لدينا : $\forall t \in [0,x] : 1 \le e^t \le e^x$ (لأن $\exp \nearrow$ على $[0,x]$)

و بما أن : $x-t \ge 0$ فإن :

$$\forall t \in [0,x] : (x-t) \le (x-t)e^t \le (x-t)e^x$$

إذن : $\int_0^x (x-t)dt \le I(x) \le e^x \int_0^x (x-t)dt$

هذا يعني أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \frac{x^2}{2} \le I(x) \le \frac{x^2}{2}e^x$

(لأن : $\int_0^x (x-t)dt = \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$)

نتبع نفس الطريقة فنبين أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^- : \frac{x^2}{2}e^x \le I(x) \le \frac{x^2}{2}$$.

ج- مما سبق نستنتج أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{1}{2} \le \frac{e^x-(1+x)}{x^2} \le \frac{e^x}{2}$$

و $\forall x \in \mathbb{R}_-^* : \frac{e^x}{2} \le \frac{e^x-(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$.

و حيث أن : $\lim_{x\to0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ ، فإن :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

إذن : $\lim_{x\to0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

3)- أ- لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

إذن (Ox) مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $-\infty$.

و بالنسبة ل $+\infty$ لدينا :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

و

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

هذا يعني أن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا إتجاهه محور الأراتيب (Oy) .

ثانوية الفتح نيابة الخميسات	تصحيح الفرض المنزلي رقم 03 الدورة الثانية 2006/2005	2 باك ع ت 01 + 2 باك ع ت 02 Prof : BENELKHATIR

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \exp'(0) = e^0 = 1 = f(0)$

إذن f متصلة عند 0 .

4)- لدينا حسب السؤال 2)- ج- :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

هذا يعني أن f قابلة للإشتقاق عند 0 و $f'(0) = \frac{1}{2}$.

ب- لدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$:

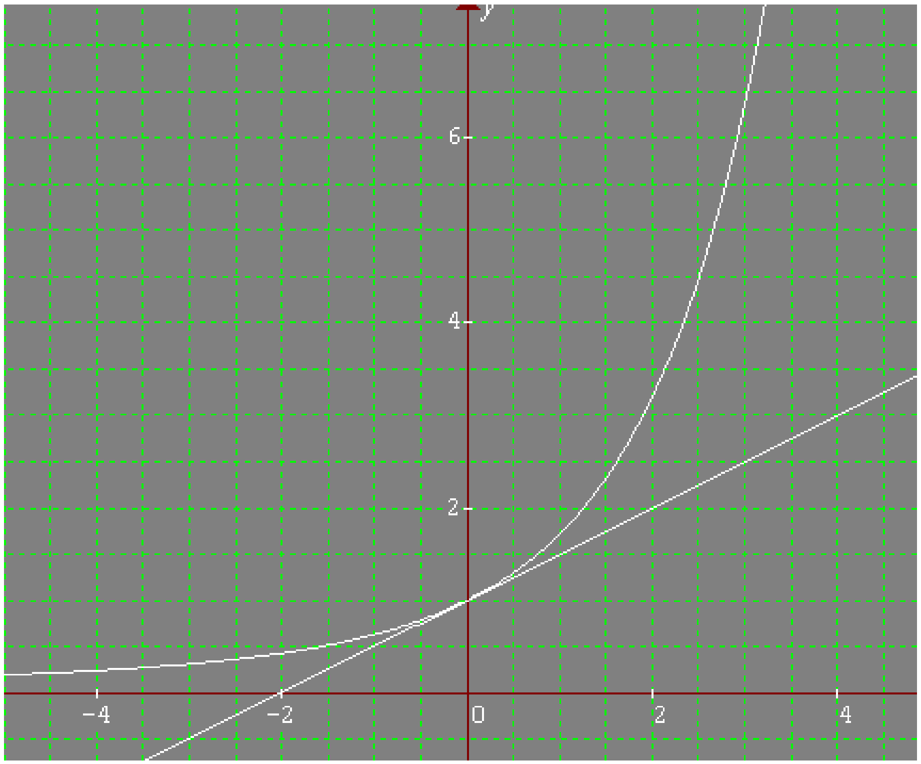
$$f'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

و بما الدالة g موجبة على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ ، وجدول تغيراتها كالآتي :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
f	0 ↗ $+\infty$

إنشاء المماس (T) و المنحنى (C_f):



abouzakariya@yahoo.fr