المـمـلـكــة المــغــربـيــة وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر و البحث العلمـــــي

قطــــاع التربيــــة الـــوطنيــة

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات — مدة الانجاز : 4 ساعات

الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب) — المعامل : 10

التمرين الأول:

الجزء الأول

1- أ)

ليكن $(a,b) \in E^2$

لدينا: $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(2ab - a\sqrt{2} - b\sqrt{2} + 1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - ab\sqrt{2} + a + b - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= a + b - ab\sqrt{2}$$

$$= a \perp b$$

ب)

ليكن $(a,b) \in E^2$

لدينا: $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a + b - ab\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a\sqrt{2}-1) = 0 \text{ أو } (b\sqrt{2}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ أو } b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و هذا خلف لأن $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن $a \perp b \in E$

وبالتالي $\perp$ قانون تركيب داخلي في E

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات | **مدة الانجاز : 4 ساعات**

الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب) | **المعامل : 10**

-2

- التبادلية : ليكن $(a,b) \in E^2$

لدينا $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

$= b + a - ba\sqrt{2}$

$= b \perp a$

إذن : $\perp$ تبادلي في E

- التجميعية: ليكن a و b و c من E

لدينا : $(a \perp b) \perp c = (a + b - ab\sqrt{2}) \perp c$

$= a + b - ab\sqrt{2} + c - (a + b - ab\sqrt{2})c\sqrt{2}$

$= a + b + c - ab\sqrt{2} - ac\sqrt{2} - bc\sqrt{2} + 2abc$

و لدينا: $a \perp (b \perp c) = a \perp (b + c - bc\sqrt{2})$

$= a + b + c - bc\sqrt{2} - a(b + c - bc\sqrt{2})\sqrt{2}$

$= a + b + c - ab\sqrt{2} - ac\sqrt{2} - bc\sqrt{2} + 2abc$

$= (a \perp b) \perp c$

إذن : $\perp$ تجميعي في E

- العنصر المحايد:
لكل a من E

لدينا: $a \perp 0 = a + 0 - a0\sqrt{2} = a$

و $\perp$ تبادلي في E

إذن 0 هو العنصر المحايد في E.

المـملـكــة المــغــربـيــة وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر و البحث العلمــــي

قطــــاع التربيـــــة الــوطنيـــة

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات — مدة الانجاز : 4 ساعات

الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب) — المعامل : 10

- المماثل:

ليكن a و b من E

$$a \perp b = 0 \Leftrightarrow a + b - ab\sqrt{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow a + b\left(1 - a\sqrt{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{-a}{\left(1 - a\sqrt{2}\right)} \qquad \left(1 - a\sqrt{2} \neq 0 \ \text{لأن}\right)$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{a}{\left(a\sqrt{2} - 1\right)}$$

إذن كل عنصر a من E يقبل مماثلا $\frac{a}{\left(a\sqrt{2}-1\right)}$

و بالتالي $(E, \perp)$ زمرة تبادلية.

الجزء الثاني

1- أ)

لدينا:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -2A$$

(*)

لدينا:

$$I + \frac{a}{\sqrt{2}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & 1 - \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix}$$
$$= M(a)$$

www.madariss.fr

ب)

ليكن $M(a)$ و $M(b)$ من $\mathcal{F}$

$$M(a)\times M(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$$

$$=I^2+\frac{b}{\sqrt{2}}IA+\frac{a}{\sqrt{2}}AI+\frac{ab}{2}A^2$$

$$=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{ab}{2}(-2A)$$

$$=I+\frac{a+b-ab\sqrt{2}}{\sqrt{2}}A$$

$$=M(a\perp b)$$

وبما أن: $a+b-ab\sqrt{2}\in E$

فإن: $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

-2

أ)

التشاكل:

$$\varphi(a\perp b)=M(a\perp b)$$

$$=M(a)\times M(b)$$

$$=\varphi(a)\times\varphi(b)$$

إذن φ تشاكل من $(E,\perp)$ نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

- التقابل:

- التباينية:

$$\varphi(a)=\varphi(b)\Leftrightarrow M(a)=M(b)$$
$$\Rightarrow a=b$$

إذن φ تبايني

- الشمولية:

لدينا : $(\forall M \in \mathcal{F})\ (\exists a \in E)\ \varphi(a) = M(a)$

إذن φ شمولي

و بالتالي φ تقابل

إذن φ تشاكل تقابلي .

ب)

لدينا: $(E,\perp)$ زمرة تبادلية

و φ تشاكل تقابلي من $(E,\perp)$ نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

إذن $(\mathcal{F},\times)$ زمرة تبادلية

التمرين الثاني:

الجزء الأول

1- أ)

$$\begin{aligned}u^2-(1+a)(1+i)u+(1+a^2)i &= (a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+(1+a^2)i\\ &= a^2+2ai-1-(1+i+a+ai)(a+i)+i+a^2i\\ &= a^2+2ai-1-a-i-ai+1-a^2-ai-a^2i+a+i+a^2i\\ &= 0\end{aligned}$$

ب)

الحل الثاني هو : v

$$\begin{aligned}v &= ai+1\\ &= i(a-i)\end{aligned}$$

2- نفترض أن $|a| = 1$

أ)

المـمـلـكــة المــغــربـيــة وزارة التربية الوطنية والتعليم
العالي وتكوين الأطر و البحث العلمـــــي

قطـــــاع
التربيــــة
الــوطنيـــة

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات

الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب)

مدة الانجاز : 4 ساعات

المعامل : 10

$$\frac{u}{v}=\frac{a+i}{i(a-i)}$$

$$=-\frac{(a+i)(a-i)}{|a-i|^2}i$$

$$=-\frac{|a|^2-1+i(a+\bar{a})}{|a-i|^2}i$$

$$=\frac{2Re(a)}{|a-i|^2}\in\mathbb{R}$$

إذن: $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$

ب)

لدينا: $a[(a-\bar{a})+2i]=a^2-a\bar{a}+2ai$

$$=a^2-1+2ai$$

$$=(a+i)^2$$

$$=u^2$$

ج)

$$arg(u^2)\equiv arg(a[(a-\bar{a})+2i])[2\pi]\Leftrightarrow 2\arg(u)\equiv\arg(a)+arg((a-\bar{a})+2i)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\arg(u)\equiv\arg(a)+\frac{\pi}{2}+\arg(1+Im(a))[2\pi]$$

$$\Rightarrow 2\arg(u)\equiv\arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(u)\equiv\frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$$

-3

لدينا: $|u|+|v|\geq|u+iv|$

$$\Leftrightarrow |u|+|v|\geq|a+i+i-a|$$

$$\Leftrightarrow |u|+|v|\geq|2i|$$

$$\Leftrightarrow |u|+|v|\geq 2$$

www.madariss.fr

المـمـلـكــة المــغــربـيــة وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر و البحث العلمـــــي

قطــــاع التربيــــة الـــوطنيــة

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

مدة الانجاز : 4 ساعات
المعامل : 10

المادة : الرياضيات
الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب)

الجزء الثاني

-1

لدينا: $|u| + |v| = m$

$$\Leftrightarrow |a+i| + |ai+1| = m$$

$$\Leftrightarrow |a+i| + |a-1| = m$$

$$\Leftrightarrow MF + MF' = m \qquad \left(F(i); F'(-i); M(a) \quad \text{حيث} \right)$$

و لدينا: $FF' = 2 < m$

إذن (E_m) إهليلج مركزه O بؤرتاه F و F' .

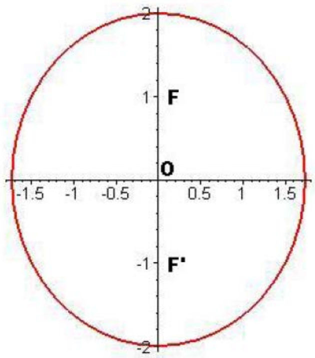
-2 أ)

www.madariss.fr

$$M(a) \in E_m \Leftrightarrow |a+i|+|a-i| = m$$
$$\Leftrightarrow |a+i|^2+|a-i|^2+2|a+i||a-i| = m^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2+x^2+(y-1)^2+2\sqrt{x^2+(y+1)^2}\sqrt{x^2+(y-1)^2} = m^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2+2\sqrt{(x^2+y^2+1+2y)(x^2+y^2+1-2y)} = m^2$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+1)+2\sqrt{(x^2+y^2+1)^2-4y^2} = m^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+y^2+1)^2-4y^2} = \frac{m^2}{2}-(x^2+y^2+1)$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+1)^2-4y^2 = \frac{m^4}{4}-m^2(x^2+y^2+1)+(x^2+y^2+1)^2$$
$$\Leftrightarrow -4y^2 = m^2\left(\frac{m^2}{4}-(x^2+y^2+1)\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{-4}{m^2}y^2 = \frac{m^2}{4}-(x^2+y^2+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{4}{m^2}y^2 = \frac{m^2}{4}-1$$
$$\Leftrightarrow x^2+(1-\frac{4}{m^2})y^2 = \frac{m^2}{4}-1$$

ب)

$$(E_4) : \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} = 1$$



-3

$$\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) : \quad x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7}$$

$$(AB) : \begin{vmatrix} x & \sqrt{3} \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(AB) : \ 2x + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

لتكن $M(a = x + yi)$ نقطة من المستوى العقدي

إذن:

$$M \in (AB) \cap \left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \\ x = \frac{\sqrt{3}(2-y)}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}(2-y)^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \\ x = \frac{\sqrt{3}(2-y)}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \frac{8}{7}\right)^2 = 0 \\ x = \frac{\sqrt{3}(2-y)}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{7} \\ x = \frac{3\sqrt{3}}{7} \end{cases}$$

و منه : $(AB) \cap \left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) = \left\{\frac{3\sqrt{3}}{7} + \frac{8}{7}i\right\}$

و بالتالي (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

التمرين الثالث:

1- أ)

لدينا: $195x - 232y = 1$

ولدينا: $232 = 195 + 37$

$$195 = 5 . 37 +10$$

$$37 = 3 . 10 + 7$$

$$10 = 7 + 3$$

$$7 = 3 . 2 + 1$$

ومنه $(-69, -58)$ حل خاص ل (E)

إذن حسب مبرهنة *Bezout* $232 \wedge 195 = 1$

ب)

نلاحظ أن الزوج $(-69, -58)$ حل خاص ل (E)

إذن : $195x - 232y = 195.(-69) - 232.(-58)$

$$\Leftrightarrow 195(x + 69) = 232(y + 85)$$

$$\Leftrightarrow {}^{195}/_{232(y+85)} \quad \text{و} \quad 232 \wedge 195 = 1$$

إذن حسب *Gauss* ${}^{195}/_{y+85}$

$$\Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z})\ y = 195k' - 85$$

و لدينا: $195(x + 69) = 232(195k')$

$$\Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z})\ x = 232k' - 69$$

نضع $k' = k + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و بالتالي : $/ k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} x = 163 + 232k \\ y = 137 + 195k \end{cases}$

إذن : $S = \{(163 + 232k; 137 + 195)\}$

ج)

ليكن $k \in \mathbb{Z}$

$$d = 163 + 232k$$

لدينا : $0 \le d \le 232 \Leftrightarrow 0 \le 163 + 232k \le 232$

إعداد: رشيد أدجار

$$\Leftrightarrow -163 \leq 232k \leq 69$$

$$\Longrightarrow k = 0$$

إذن : $d = 163$

-2

	p	q	r
233	2	116	1
	3	77	2
	5	46	3
	7	33	2
	11	21	2
	13	17	12
	17	13	12

إذن 233 عدد أولي.

-3

أ)

ليكن a و b من A حيث $f(a) = f(b)$

أي $f(a) = a^{195}[233]$ و $f(b) = b^{195}[233]$

إذن: $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

و حسب ما سبق $195d \equiv 1[232]$ أي/ $195d = 1 + 232y$

و لدينا : $d = 163$ إذن : $y = 137$

وبالتالي: $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

إذن: $a^{195d} \equiv b^{195d}[233]$

و منه: $a^{1+232y} \equiv b^{1+232y}[233]$

و بمأن : $a^{232} \equiv 1[233]$

$$\Longrightarrow a^{232y} \equiv 1[233]$$

$$\Longrightarrow a^{232y+1} \equiv a[233]$$

و من جهة: $b^{232} \equiv 1[233]$

$$\Longrightarrow b^{232y} \equiv 1[233]$$

$$\Longrightarrow b^{232y+1} \equiv b[233]$$

و منه: $a \equiv b[233]$

يعني: $(\exists k \in \mathbb{Z})\ a - b = 233k$ حيث $0 \leq a \leq 232$ و $0 \leq b \leq 232$

إذن: $-232 \leq a - b = 233k \leq 232$

إذن : $k = 0$

و بالتالي : $a = b$

ب)

ليكن a و b من A بحيث : $f(a) = b$

إذن : $f(a) \equiv a^{195}[233]$

$\Leftrightarrow b \equiv a^{195}[233]$

$\Longrightarrow b^{d} \equiv a^{195d}[233]$

و حسب السؤال السابق $a^{195d} \equiv a[233]$

$\Longrightarrow b^{d} = b^{163} \equiv a[233]$

إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z})\ a = b^{163} - 233k$

ج)

لدينا من خلال طريقة إنشاء f فهو شمولي

و لدينا حسب السؤال (3- أ): f تبايني

إذن f تقابل

- تقابله العكسي:

$f^{-1}(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{163} على 233

أي: $f^{-1}(a) \equiv a^{163}[233]$

التمرين الرابع:

الجزء الأول

المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر و البحث العلمي

قطاع التربية الوطنية

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

مدة الانجاز : 4 ساعات — المادة : الرياضيات

المعامل : 10 — الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب)

-1

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R})\ g'(x) = e^{x} + (x-1)e^{x}$

$$= xe^{x}$$

و بالتالي $g(0) = 0$ هي القيمة الدنوية ل $g(x)$

إذن: $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) \geq 0$

-2

لدينا g تناقصية قطعا على $]-\infty, 0]$ و تزايدية قطعا على $[0, +\infty[$

و $g(0) = 0$ إذن $x = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$

الجزء الثاني

-1

- لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}-1}$

$$= 0$$

- لدينا: $\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x}-1} + x$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x + xe^{x} - x}{e^{x}-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{x}}{e^{x}-1}$$

$$= 0$$

-2

لدينا: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{x}-1}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{x}-1}{x}}$$

$$= 1 = f(0)$$

$$\left(\text{لأن} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1 \right)$$

إذن f متصلة في 0.

www.madariss.fr

المـملـكــة المــغــربـيــة وزارة التربية الوطنية والتعليم
العالي وتكوين الأطر و البحث العلمـــــي

قطـــــاع
التربيــــة
الــوطنيــة

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات
الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب)

مدة الانجاز : 4 ساعات
المعامل : 10

-3

أ)

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right) \qquad f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= -\frac{1 + (x-1)e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= -\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

ب)

لدينا $f'(x)$ تقبل عكس إشارة $g(x)$

و لدينا حسب ما سبق $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) \geq 0$

إذن: $f'(x) \leq 0 \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)$

و بالتالي : f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

-4

أ)

نضع $\begin{cases} U(t) = t \\ V'(t) = e^{-t} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} U'(t) = 1 \\ V(t) = -e^{-t} \end{cases}$

ولدينا U' و V' متصلتان على $[0, x]$

$$J(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= \left[-te^{-t}\right]_0^x + \left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$= e^{-x}(e^x - 1 - x)$$

ب)

ليكن $x \in \mathbb{R}$

- إذا كان $x \geq 0$

لدينا لكل $t \in [0,x]$

$$te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$$

$$\Rightarrow e^{-x}\int_0^x t\,dt \leq \int_0^x te^{-t} \leq \int_0^x t\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}e^{-x} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

- إذا كان $x \leq 0$

لدينا لكل $t \in [x,0]$

$$te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$$

$$\Rightarrow e^{-x}\int_x^0 t\,dt \leq \int_x^0 te^{-t} \leq \int_x^0 t\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x t\,dt \leq \int_0^x te^{-t} \leq e^{-x}\int_0^x t\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

إذن

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

ج)

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

لدينا : $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq e^{-x}(e^x - 1 - x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq \frac{e^{-x}(e^x-1-x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}+x} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}+x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x+|x|-2x}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{x-|x|-2x}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$$

إذن : $\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$

د)

لكل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{x}{e^x-1}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

و حسب السؤال (4-ج) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$

إذن: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}$

إذن f قابلة للإشتقاق في 0 و $f'(0) -\frac{1}{2}$.

-5

أ)

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \qquad f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{g'(x)(e^x-1)^2 - 2e^x(e^x-1)g(x)}{(e^x-1)^4}$$

$$= -\frac{g'(x)(e^x-1) - 2e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{g'(x)(1-e^x) + 2e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{xe^x(1-e^x)+2e^x(1+(x-1)e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}[x(1-e^x)+2(1+(x-1)e^x]$$

$$= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(x-2e^x+2+xe^x)$$

$$= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(e^x(x-2)+2+x)$$

ب)

نضع : $k(x) = e^x(x-2)+2+x$

- إذا كان: $x > 0$ فإن $k(x) > 0$
- إذا كان: $x < 0$ فإن $k(x) < 0$
- إذا كان: $x = 0$ فإن $k(x) = 0$

ج)

- إذا كان: $x > 0$ فإن $k(x) > 0$ و $e^x - 1 > 0$
  إذن: $f''(x) > 0$
- إذا كان: $x < 0$ فإن $k(x) < 0$ و $e^x - 1 < 0$
  إذن: $f''(x) > 0$

إذن لكل x من $\mathbb{R}^*$ $f''(x) > 0$

د)

www.madariss.fr

المـمـلـكــة المــغــربـيـــة وزارة التربية الوطنية والتعليم
العالي وتكوين الأطر و البحث العلمـــــي

قطـــــاع
التربيـــــة
الــوطنيـــة

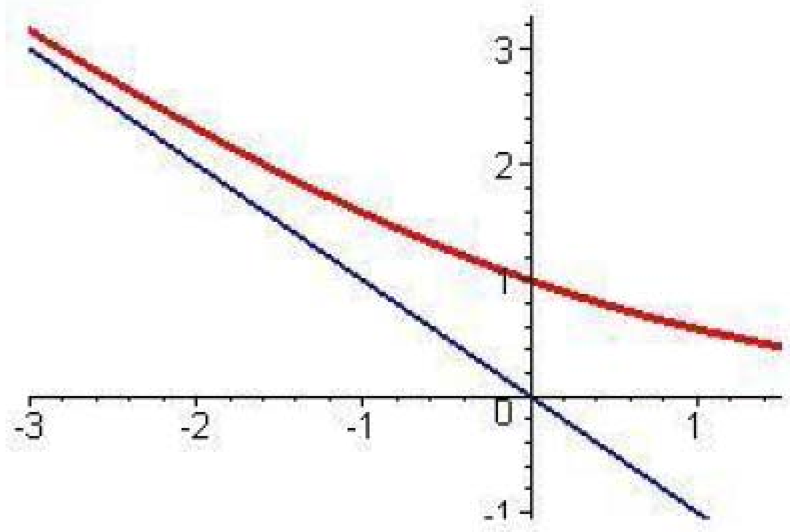
إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات
الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب)

مدة الانجاز : 4 ساعات
المعامل : 10



الجزء الثالث

-1

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x - 1} = 1 \qquad (\text{لأن} \quad x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = ln2$$

إذن $x = ln2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

-2

أ)

المـمـلـكــة المــغــربيــة وزارة التربية الوطنية والتعليم
العالي وتكوين الأطر و البحث العلمـــــي
قطــــاع
التربيــــة
الــوطنيـــة

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات — **مدة الانجاز : 4 ساعات**

الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب) — **المعامل : 10**

لدينا: لكل x من $\mathbb{R}^*$ $\quad f''(x)>0$

إذن f' تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

و لكل x من $\mathbb{R}^+$ $\quad f'(x)\leq 0$

و لدينا : $f'(0)-\frac{1}{2}$ إذن $-\frac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0$

$$\Rightarrow \left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\quad |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

ب)

ليكن n من $\mathbb{N}$

لدينا : f دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال I الذي طرفاه $ln2$ و u_n

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية $(\exists c\in I)\ f'(c)=\frac{f(u_n)-f(ln2)}{u_n-ln2}$

و لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |f'(c)|\leq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(u_n)-f(ln2)}{u_n-ln2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{u_{n+1}-ln2}{u_n-ln2}\right|\leq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+1}-ln2|\leq\frac{1}{2}|u_n-ln2|$$

إذن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-ln2|\leq\frac{1}{2}|u_n-ln2|$

ج)

لدينا: $(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_{n+1}-ln2|\leq\frac{1}{2}|u_n-ln2|$

إذن : $|u_1-ln2|\leq\frac{1}{2}|u_0-ln2|$

$$|u_2-ln2|\leq\frac{1}{2}|u_1-ln2|$$

$$|u_3-ln2|\leq\frac{1}{2}|u_2-ln2|$$

www.madariss.fr

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات
الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب)
مدة الانجاز : 4 ساعات
المعامل : 10

. . .
. . .
. . .

$$|u_n - ln2| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - ln2|$$

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على:

$$|u_n - ln2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - ln2|$$

$$\Leftrightarrow |u_n - ln2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - ln2|$$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و نهايتها:

لدينا : $lim\left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - ln2| = 0$ $\left(\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ لأن }\right)$

إذن : $\lim u_n = ln2$

الجزء الرابع

-1

أ)

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

- إذا كان $x > 0$ فإن $x \leq 2x$

لدينا : $x \leq t \leq 2x$

$$\Rightarrow f(2x) \leq f(t) \leq f(x) \quad (\text{لأن } f \text{ تناقصية})$$

$$\Rightarrow f(2x)\int_x^{2x} dt \leq \int_x^{2x} f(t)dt \leq f(x)\int_x^{2x} dt$$

$$\Rightarrow f(2x)[t]_x^{2x} \leq F(x) \leq f(x)[t]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{e^{2x}-1}[t]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{x}{e^x - 1}[t]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{e^{2x}-1}(2x - x) \leq F(x) \leq \frac{x}{e^x - 1}(2x - x)$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$$

إذن $(\forall x > 0) \quad \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

- إذا كان $x < 0$ فإن $2x \leq x$

لدينا : $2x \leq t \leq x$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(2x) \quad (\text{لأن } f \text{ تناقصية})$$

$$\Rightarrow f(x) \int_{2x}^{x} dt \leq \int_{2x}^{x} f(t)dt \leq f(2x) \int_{2x}^{x} dt$$

$$\Rightarrow f(x)[t]_{2x}^{x} \leq -F(x) \leq f(2x)[t]_{2x}^{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{e^x - 1}[t]_{2x}^{x} \leq -F(x) \leq \frac{2x}{e^{2x} - 1}[t]_{2x}^{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{e^x - 1}(x - 2x) \leq -F(x) \leq \frac{2x}{e^{2x} - 1}(x - 2x)$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2}{e^x - 1} \leq -F(x) \leq \frac{-2x^2}{e^{2x} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$$

إذن $(\forall x > 0) \quad \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

و بالتالي: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

ب)

لدينا: $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{e^{2x}-1} - \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}$

$$= 0 \quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \text{ لأن}\right)$$

ولدينا: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{e^x-1}{x}}$

$$= 0 \quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ لأن}\right)$$

و بما أن: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

فإن: $\lim_{x\to 0} F(x) = 0 = F(0)$

www.madariss.fr

إذن: F متصلة في 0.

ج)

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

لدينا:

$$\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) - F(0) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{e^{2x}-1} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{x}{e^x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{e^{2x}-1} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{x}{e^x-1}$$

و لدينا:

$$\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}$$

$$= 1$$

و

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{e^{x}-1} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^{x}-1}{x}}$$

$$= 1$$

إذن: $\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x} = 1$

إذن: F قابلة الاشتقاق في 0. و $F'(0) = 1$

-2

أ)

- لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$

و الدالتان $x \mapsto x$ و $x \mapsto 2x$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

إذن F قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر و البحث العلمي

قطاع التربية الوطنية

إعداد: رشيد أدجار

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة العادية 2007)

المادة : الرياضيات — **مدة الانجاز : 4 ساعات**

الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب) — **المعامل : 10**

- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$F'(x) = \frac{4x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^{x}-1}$$
$$= \frac{4x}{(e^x+1)(e^x-1)} - \frac{x(e^x+1)}{(e^x+1)(e^x-1)}$$
$$= \frac{x}{(e^x-1)}\left[\frac{4-e^x-1}{e^x+1}\right]$$
$$= \frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$$

ب)

- إذا كان: $x > ln3$ فإن $F'(x) < 0$
- إذا كان: $x < ln3$ فإن $F'(x) > 0$
- إذا كان: $x = ln3$ فإن $F'(x) = 0$

إذن:

F تناقصية قطعا على $]-\infty, ln3]$

F تزايدية قطعا على $[ln3, +\infty[$

أنجزه و بعثه التلميذ : رشيد أدجار

ابعثوا بملاحظاتكم إلى: physimaths@yahoo.fr