التمرين الأول

1- لحساب التكامل $I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}dx$ نكتبه على الشكل $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+4}dx$.

وبما أن الدالة $x \to \ln\left(x^2+4\right)$ أصلية للدالة $x \to \frac{2x}{x^2+4}$

فإن : $I=\left[\ln\left(x^2+4\right)\right]_0^1=\ln 5-\ln 4=\ln\frac{5}{4}$.

2- نحسب التكامل $J=\int_1^e \left(x^2+3\right)\ln x\,dx$ باستعمال مكاملة بالأجزاء.

نضع : $u(x)=\ln x$ و $v'(x)=x^2+3$

إذا $u'(x)=\frac{1}{x}$ و $v(x)=\frac{1}{3}x^3+3x$

وبالتالي فإن : $J=\left[\left(\frac{1}{3}x^3+3x\right).\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)dx$

$=\frac{1}{3}e^3+3e-\int_1^e\left(\frac{1}{3}x^2+3\right)dx \quad =\frac{1}{3}e^3+3e-\left[\frac{1}{9}x^3+3x\right]_1^e$

$=\frac{1}{3}e^3+3e-\frac{1}{9}e^3-3e+\frac{1}{9}+3=\frac{2}{9}\left(e^3+14\right)$

3- حساب التكامل $K=\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\sqrt{e^x-2}\,dx$ بوضع $t=\sqrt{e^x-2}$

بما أن $t=\sqrt{e^x-2}$ فإن $t^2=e^x-2$ ومنه $2tdt=e^xdx$

من جهة أخرى : إذا كان $x=\ln 2$ فإن $t=0$ وإذا كان $x=\ln 3$ فإن $t=1$

و بالتالي فإن : $K=\int_0^1 2t^2dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$.

التمرين الثاني

1- أ- لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $v_{n+1}=3u_{n+1}+1=3\left(\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{4}\right)+1$

$=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(3u_n+1)=\frac{1}{4}v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0=3u_0+1=7$.

ب- بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n=v_0\times q^n=7\left(\frac{1}{4}\right)^n$

وبما أن $v_n=3u_n+1$ فإن : $u_n=\frac{1}{3}(v_n-1)=\frac{1}{3}\left[7\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right]$.

ج- لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ إذا $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\frac{1}{3}$.

2- أ- لدينا : $S_n=v_0+v_1+\dots\dots\dots+v_{n-1}=v_0\times\frac{1-q^n}{1-q}$ إذا $S_n=\frac{28}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

ب- لدينا $S'_n = u_0 + u_1 + ...+ u_{n-1}$

$$= \frac{1}{3}(v_0 - 1) + \frac{1}{3}(v_1 - 1) + ...+ \frac{1}{3}(v_{n-1} - 1)$$

$$= \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + ...+ v_{n-1}) - \frac{1}{3}\left(\underbrace{1+1+.........+1}_{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3}S_n - n = \frac{28}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] - n$$

ج- لدينا $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ إذا $\lim_{n \to +\infty} S'_n = -\infty$.