

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{و}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{و منه :}$$

نستنتج إذن أن (G, \times) زمرة غير تبادلية .

$$H = \{ M_{(a,b)} \in G / (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \} \quad \text{(3) نعتبر :}$$

لنبين أن H زمرة جزئية للزمرة (G, \times) . لدينا $H \neq \emptyset$ لأن $I \in H$.
ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من H لدينا :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix}$$

بما أن : $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ و $(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

فإن : $(a+bc, bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ إذن : $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} \in H$

$$\text{و من جهة أخرى لدينا : } M_{(a,b)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \text{ مع } (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

و بما أن : $(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ فإن : $M_{(a,b)}^{-1} \in H$

التمرين الأول :

$$G = \left\{ \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\} \right\} \quad \text{نعتبر :}$$

(1 - I) نبين أن G جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.
ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من G لدينا :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix}$$

بما أن : $(a+bc, bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ فإن : $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} \in G$

و بالتالي : G جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

(2) لنبين أن (G, \times) زمرة :

لدينا : $G \neq \emptyset$ لأن $I \in G$ ولدينا G جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

$$\text{و من جهة أخرى لدينا : } M_{(a,b)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \text{ مع } (-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

إذن : $M_{(a,b)}^{-1} \in G$. و بما أن \times تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$ فإنه تجميعي أيضا في

G . نستنتج من 1 و 2 و 3 أن (G, \times) زمرة .

* دراسة تبادلية الزمرة :

$$\text{نعتبر في } G \text{ المصفوفتين : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

و بالتالي فإن H زمرة جزئية للزمرة (G, \times) .

ملاحظة: من أجل ربح الوقت أستعمل السؤال 1 و 2 دون إعادة حساب جداء المصفوفتين و المقلوب مرة ثانية فقط تغيير شروط المجموعة G بشروط المجموعة H

(4) حساب A^n بدلالة a و n . حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$).

$$\text{لدينا : } A^1 = A \text{ و } A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$$

لنبين إذن بالترجع أن : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$.

العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$.

نفترض أن العبارة صحيحة من أجل n من \mathbb{N}^* يعني : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{لدينا : } A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

(I I) نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي :

لكل (a, b) و (x, y) من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$: $(a, b)T(x, y) = (a + bx, by)$

ليكن φ التطبيق المعرف من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) : \varphi(M_{(a,b)}) = (a, b)$$

(1) لنبين أن φ تشاكل تقابلي من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

❶ φ تطبيق تقابلي من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

- φ تطبيق حسب تعريفه .

- φ تبايني : نعتبر $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ من G

$$\text{لدينا : } (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \varphi(M_{(a,b)}) = \varphi(M_{(c,d)}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M_{(a,b)} = M_{(c,d)}$ إذن φ تبايني .

- φ شمولي : نعتبر $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ لدينا : $\varphi(M_{(a,b)}) = (a, b)$

إذن φ شمولي .

و بالتالي φ تطبيق تقابلي من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

❷ φ تشاكل : نعتبر $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ من G .

$$\text{لدينا : } \varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a+bc, bd)})$$

$$\text{لأن : } M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix}$$

$$\text{و لدينا : } \varphi(M_{(a+bc, bd)}) = (a + bc, bd)$$

و من جهة أخرى : $(a + bc, bd) = (a, b)T(c, d) = \varphi(M_{(a,b)})T \varphi(M_{(c,d)})$

و بالتالي : $\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a,b)})T \varphi(M_{(c,d)})$ إذن φ تشاكل .

من ❶ و ❷ نستنتج أن φ تشاكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.

(2) بما أن (G, \times) زمرة و φ تشاكل تقابلي من (G, \times) نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.

فإن $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$ زمرة .

(3) مماثل $(a, 1)T(a, 1)T \dots T(a, 1)$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$

ج - نفترض أن : $a = 1$ بما أن : $b = 1$ فإنه حسب * : $a^2(a + b) = 0$
و هذا غير ممكن لأن $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

بما أن $b = 1$ فإن العلاقة * تصبح : $d(a - 1)^2 = (a + 1)a$

إذن : $(a - 1)/(a + 1)a$ و بما أن a و $a - 1$ عددين متتابعين فإنهما أوليان فيما بينهما .
إذن : $(a - 1)/(a + 1)$.

د - لدينا : $a - 1 = (a + 1) - 2$ و $(a - 1)/(a + 1)$ إذن : $a - 1/2$
و بما أن : $a \in \mathbb{N}^*$ فإن : $a - 1 = 2$ أو $a - 1 = 1$
و بالتالي : $a = 2$ أو $a = 3$.

2) حسب ما سبق لدينا : $(a = 2$ و $b = 1)$ أو $(a = 3$ و $b = 1)$
الحالة الأولى : $(a = 2$ و $b = 1)$ من خلال العلاقة * نستنتج أن : $d = 12$
إذن : $(x, y) = (12 \times 2, 12 \times 1) = (24, 12)$

الحالة الثانية : $(a = 3$ و $b = 1)$ من خلال العلاقة * نستنتج أن : $d = 9$
إذن : $(x, y) = (9 \times 3, 9 \times 1) = (27, 9)$

و بالتالي حلول المعادلة (E) هي : $\{(24, 12), (27, 9)\}$.

التمرين الثالث :

لكل عدد z عقدي من C نضع :

$$P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$$

(I) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

نعتبر (H) مجموعة النقط ذات اللق z التي من أجلها يكون $P(z)$ تخليا صرفا .

لنبين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ هي معادلة ديكرتية للمجموعة (H).

نضع : $z = x + yi$ حيث : $\text{Re}(z) = x$ و $\text{Im}(z) = y$

$$P(z) = -P(\bar{z}) \Leftrightarrow P(z) = -\overline{P(z)} \Leftrightarrow P(z) \text{ تخليا صرفا}$$

$$(x + iy)^2 - (2 + 6i)(x + iy) = -(x - iy)^2 + (2 - 6i)(x - iy) \text{ يعني}$$

لدينا : $\varphi(A) = (a, 1)$

$$\underbrace{(a, 1)T(a, 1)T \dots T(a, 1)}_{n \text{ مرة}} = \underbrace{\varphi(A)T\varphi(A)T \dots T\varphi(A)}_{n \text{ مرة}} = \varphi(A^n)$$

إذن صورة مماثل A^n في (G, \times) هي مماثل $(a, 1)T(a, 1)T \dots T(a, 1)$ n مرة .

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \text{ حيث } (G, \times) \text{ في } A^n \text{ نحدد مماثل}$$

$$\text{لدينا : } (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -na & 1 \end{pmatrix} \text{ (نستعمل } 2_I \text{ لدينا) } M_{(a,b)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

و بالتالي مماثل $(a, 1)T(a, 1)T \dots T(a, 1)$ n مرة حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

$$\varphi((A^n)^{-1}) = \varphi(M_{(-na, 1)}) = (-na, 1) \text{ هو}$$

التمرين الثاني :

نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) : $x^2(x + y) = y^2(x - y)^2$

(I) ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E). نضع $x \wedge y = d$ و $x = ad$ و $y = bd$

أ - بتعويض $x = ad$ و $y = bd$ في المعادلة (E)

نجد : $a^2d^2(a + b)d = b^2d^2(a - b)^2d^2$ و منه : $a^2(a + b) = b^2(a - b)^2$

ب - نستنتج حسب أ - أن : $b/a^2(a + b)$ و بما أن : $(a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b^2 = 1)$

فإن : $b/(a + b)$ و لدينا : b/b إذن : $b/(a + b) - b$ يعني b/a

و بما أن : $a \wedge b = 1$ و $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ فإن : $b = 1$.

لدينا بالنسبة للمعلم $(\Delta_2): Y = -X$ و $(\Delta_1): Y = X : (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\begin{cases} y - 3 = x - 1 \\ y - 3 = -(x - 1) \end{cases} \text{ : بأستعمال نفس النظمة نجد :}$$

يعني : $(\Delta_1): y = x + 2$ و $(\Delta_2): y = -x + 4$

و بالتالي بالنسبة للمعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

لدينا مركز (H) هو $\Omega(1,3)$

الرأسان هما : $A(1, 2\sqrt{2} + 3)$ و $A'(1, 3 - 2\sqrt{2})$

معادلتى المقاربتين هما : $(\Delta_1): y = x + 2$ و $(\Delta_2): y = -x + 4$

(3) النقطة $O(0,0)$ تحقق معادلة (H) إذن فهي تنتمي إلى (H)

معادلة مماس للمنحنى عند O بالنسبة للمعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\frac{X^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(2\sqrt{2})^2} = -1 : (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

لدينا إحداثيتي النقطة O بالنسبة للمعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ هما : $O(-1, -3)$ و ذلك بالرجوع إلى النظمة . إذن معادلة المماس ل (H) عند $O(-1, -3)$ بالنسبة للمعلم

$(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\text{هي : } \frac{XX_0}{8} - \frac{YY_0}{8} = -1 \text{ يعني : } -\frac{X}{8} + \frac{3Y}{8} = -1 \text{ لتحويل هذه المعادلة إلى}$$

$$\text{المعلم } (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \text{ نستعمل النظمة } \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \end{cases} \text{ فنحصل على معادلة المماس ل (H)}$$

عند O بالنسبة للمعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: $-x + 3y = 0$

و منه : $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة (H) .
(2) طبيعة (H)

$$x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - (y - 3)^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y-3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = -1 \text{ : لدينا}$$

$$\text{إذا وضعنا : } \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \end{cases} \text{ فإن معادلة (H) تكتب في المعلم } (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

$$\text{حيث } \Omega(1,3) \text{ على شكل : } \frac{X^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(2\sqrt{2})^2} = -1$$

و بالتالي فإن (H) هذلول (H) مركزه $\Omega(1,3)$

العناصر المميزة في المعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

الرأسان هما : $A(0, 2\sqrt{2})$ و $A(0, -2\sqrt{2})$

المقاربان : $(\Delta_1): Y = X$ و $(\Delta_2): Y = -X$

العناصر المميزة في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

لدينا بالنسبة للمعلم $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: $A(0, 2\sqrt{2})$ و $A(0, -2\sqrt{2})$

$$\text{بأستعمال النظمة : } \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \end{cases} \text{ نجد : } \begin{cases} 0 = x - 1 \\ 2\sqrt{2} = y - 3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 0 = x - 1 \\ -2\sqrt{2} = y - 3 \end{cases}$$

و منه بالنسبة للمعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ لدينا : $A(1, 2\sqrt{2} + 3)$ و $A'(1, 3 - 2\sqrt{2})$

(II) 1 حل المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$

لدينا : $P(z) = 4 - 6i \Leftrightarrow z^2 - (2 + 6i)z - 4 + 6i = 0$

$$\Delta' = (1 + 3i)^2 + 4 - 6i = -4 = (2i)^2$$

إذن المعادلة تقبل حلين في C : $z_1 = 1 + (3 + 2)i = 1 + 5i$ و $z_2 = 1 + i$
(2 أ - لدينا :

$$u^4 \times v = (1 + 5i)^4 (1 + i) = (476 - 480i)(1 + i) \\ = 956 - 4i = 4(239 - i) = 4w$$

(ب) عمدة u :

$$u = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} + i \right) = \frac{1}{5} (\tan(\alpha) + i) = \frac{1}{5 \cos(\alpha)} (\sin(\alpha) + i \cos(\alpha))$$

لدينا

$$= \frac{1}{5 \cos(\alpha)} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right)$$

$$\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha) > 0$$

بما أن :

$$\arg(u) = \frac{\pi}{2} - \alpha [2\pi]$$

فإن :

عمدة w :

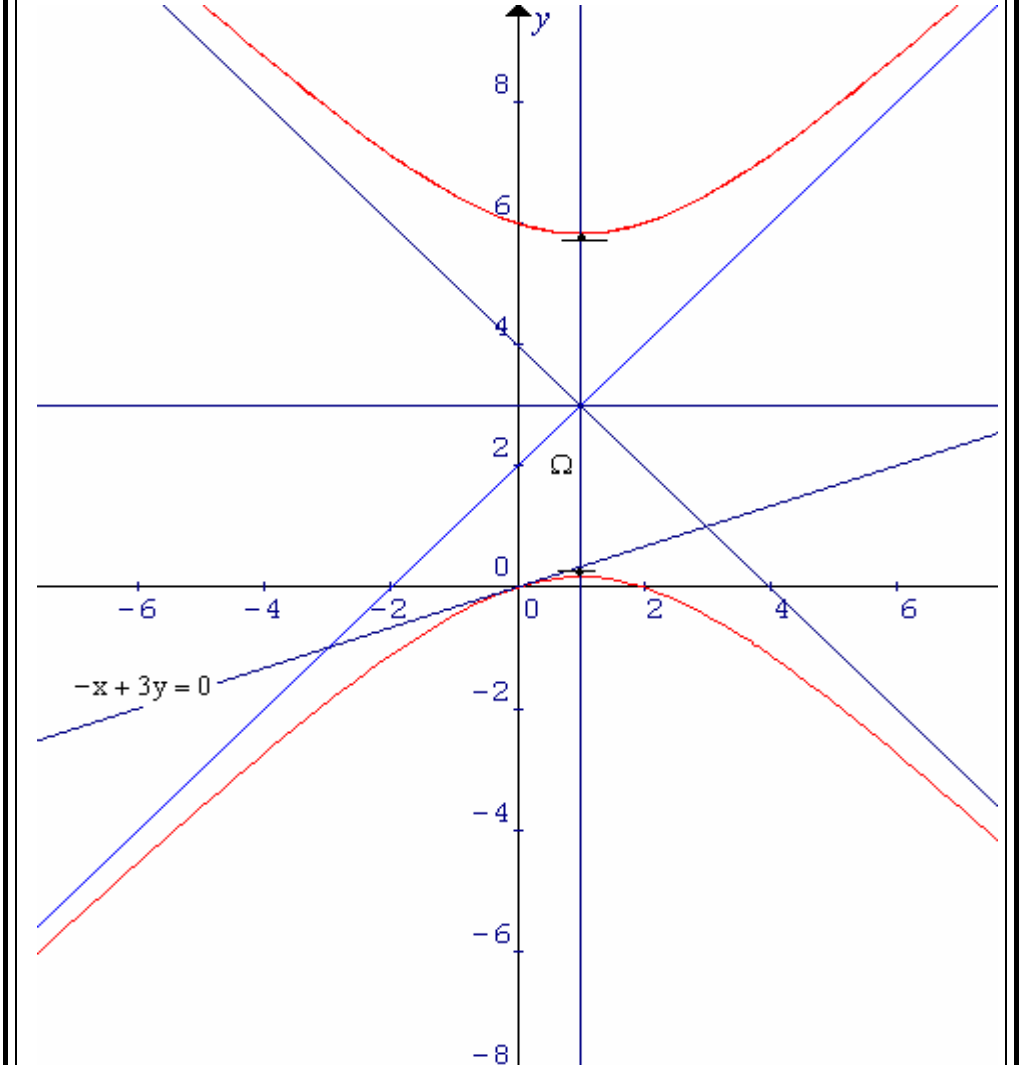
$$w = 239 \left(1 - \frac{1}{239}i \right) = \frac{239}{\cos(\beta)} (\cos(-\beta) + i \sin(-\beta))$$

لدينا بالمثل :

$$\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \Rightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\beta) > 0$$

بما أن :

(4) إنشاء المنحنى (H) :



x	0	$+\infty$
g_n		+
g_n	$-\infty$	$+\infty$

(2) لنبين أن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \sqrt{x} > \ln(x)$

نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي :
الدالة h قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^*

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{x^2 - 4x}{2x\sqrt{x}(x + 2\sqrt{x})}$$

$$h'(x) = \frac{x(x-4)}{2x\sqrt{x}(x+2\sqrt{x})}$$

ولدينا من جهة أخرى : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$
نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة h .

x	0	4	$+\infty$
h'		—	+
h	$+\infty$	$2 - 2\ln(2)$	$+\infty$

بمأن : $2 - 2\ln(2) > 0$ فغنه من خلال الجدول نستنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : h(x) > 0$

فإن : $\arg(w) = -\beta[2\pi]$

ج) لدينا : $u^4 \times v = 4w$ و منه : $\text{Arg}(u^4 \times v) \equiv \text{Arg}(4w)[2\pi]$

يعني : $4\text{Arg}(u) + \text{Arg}(v) \equiv \text{Arg}(4) + \text{Arg}(w)[2\pi]$

يعني : $4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ يعني : $4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv 0 - \beta[2\pi]$

و منه $(\exists k \in \mathbb{Z}) / 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ولدينا من جهة أخرى : $0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$
 $0 < \frac{1}{239} < 1 \Rightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$

و منه : $\left(-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi\right) \Rightarrow (k=0)$

و بالتالي : $\left(4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 4\text{Arc tan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

التمرين الرابع :

الجزء الأول : نعتبر الدالة g_n المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $g_n(x) = nx + 2\ln(x)$

(1) الدالة g_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* ولدينا : $g_n'(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx + 2}{x}$

بمأن أن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{nx + 2}{x} > 0$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g_n .

الجزء الثاني :

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^{-x}$

(1) اشتقاق الدالة f عند 0^+ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

لدينا :

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0^+ و منحناها (C) يقبل نصف مماس عمودي عند موجه نحو الاعلى .

(2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{e^x} = 0$ و منه المنحنى (C) يقبل محور الافاصليل مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

(3) أ - الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-x} \right)' = \left(\frac{1}{3x} - 1 \right) x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$$

بحيث :

ب- من خلال المشقة نستنتج :

x	0	1/3	$+\infty$
f'		+	-
f	0	↗ 0,5 ↘	0

و هذا يكافئ أن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \sqrt{x} > \ln(x)$

(3) أ - لدينا الدالة g_n متصلة و تزايدية قطعا على المجال \bullet $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

$$g_n \left(\frac{1}{n} \right) = 1 + 2 \ln \left(\frac{1}{n} \right) = 1 - 2 \ln(n)$$

ولدينا :

بما أن : $n \geq 3 \Rightarrow \ln(n) \geq \ln(3) \geq 1 \Rightarrow 1 - 2 \ln(n) \leq 1 - 2 \ln(3) \leq -1 \leq 0$

فإن : $g_n \left(\frac{1}{n} \right) < 0$

$$g_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{n}{\sqrt{n}} + 2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sqrt{n} - 2 \ln(\sqrt{n})$$

ولدينا :

و حسب (2) نستنتج أن : $\sqrt{n} > 2 \ln(\sqrt{n})$ و منه : $g_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) > 0$

$$\bullet g_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \times g_n \left(\frac{1}{n} \right) < 0$$

إذن :

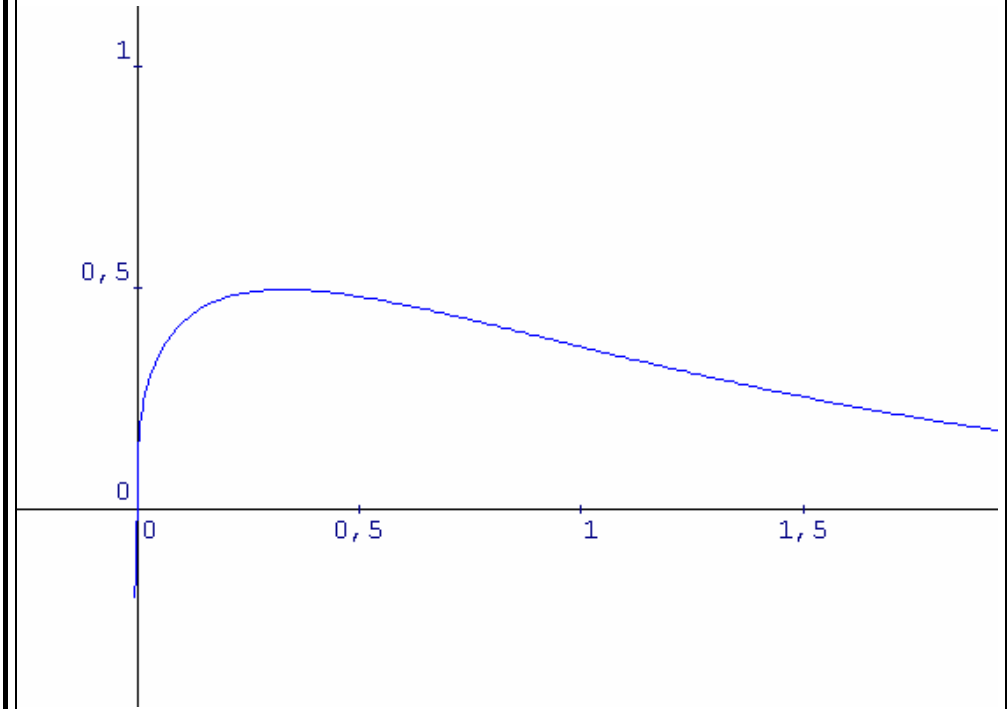
من \bullet و \bullet نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطة أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حل وحيد

$$\alpha_n \text{ بحيث } \frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ب- بما أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ لكل $n \geq 3$

$$\text{و بما أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

(4) المنحنى (C) :



(1) أ- لنبين أن : $f(I) \subset I$.

لدينا : $f(1) = \frac{1}{e} \in I$ و $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.5 \in I$ و $(1 < e < 3)$.

و بما أن الدالة f تناقصية قطعاً على I المجال و متصلة .

فإن : $f(I) = \left[f(1), f\left(\frac{1}{3}\right) \right] \subset \left[\frac{1}{3}, 1 \right]$

ب- لنبين أن : $(\forall x \in I) : |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

لدينا حسب (*) : $(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$

و بما أن : $I \subset]0, +\infty[$ فإن : $(\forall x \in I) : f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$.

و لدينا : $\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1-3x}{3x} \right| \leq \frac{2}{3}$ و $(\forall x \in I) : |f(x)| \leq 1$ لأن $f(I) \subset I$

و منه نستنتج أن : $(\forall x \in I) : |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

ج- لنبين أن : $x = \alpha_3 \Leftrightarrow (x > 0 \text{ و } f(x) = x)$ حيث α_3 هو حل المعادلة $g_3(x) = 0$

لدينا : $(x > 0 \text{ و } f(x) = x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \cdot e^{-x} = x \Leftrightarrow x \cdot e^{-3x} = x^3$

و منه : $2 \ln(x) + 3x = 0$ يعني : $g_3(x) = 0$ و هذا يكافئ أن : $x = \alpha_3$

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ- لنبين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \in I$.

لدينا : $u_0 \in I$.

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_1 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_0 - \alpha_3| \\ |u_2 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_1 - \alpha_3| \\ |u_3 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_2 - \alpha_3| \\ \vdots \\ |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \alpha_3| \end{array} \right. \quad \text{ج - لدينا :}$$

بضرب المتفاوتات طرفا طرف نحصل على : $|u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3|$

و بما أن : $u_0 = \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ فإن : $-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} < u_0 - \alpha_3 < 0$

و هذا يعني أن : $|u_0 - \alpha_3| < \frac{2}{3}$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

يمكن كذلك أن نبرهن على هذا السؤال بالترجع .

د - من التفاوتة : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha_3| = 0$ و هذا يكافئ أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \alpha_3$

و بالتالي المتتالية (u_n) متقاربة و تقبل النهاية α_3 .

نفترض أن : $u_n \in I$.

بما أن : $f(I) \subset I$ فإن : $f(u_n) \in I$ و منه : $u_{n+1} \in I$.

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \in I$

ب - لنبين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$

لكل n من \mathbb{N} لدينا f قابلة للإشتقاق على المجال : $[\inf(u_n, \alpha_3); \sup(u_n, \alpha_3)]$
حسب ميرهنة التزايدية المنتهية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \exists c_n \in]\inf(u_n, \alpha_3); \sup(u_n, \alpha_3)[\quad /$$

$$f(u_n) - f(\alpha_3) = f'(c_n)(u_n - \alpha_3)$$

و هذا يكافئ أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \exists c_n \in]\inf(u_n, \alpha_3); \sup(u_n, \alpha_3)[\quad /$

$$|f(u_n) - f(\alpha_3)| = |f'(c_n)| \times |u_n - \alpha_3|$$

و بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) :]\inf(u_n, \alpha_3); \sup(u_n, \alpha_3)[\subset I$

فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : c_n \in I$ و لدينا كذلك مما سبق : $(\forall x \in I) : |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : |f'(c_n)| \leq \frac{2}{3} \quad \text{و منه :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq \frac{2}{3} \times |u_n - \alpha_3|$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$

لدينا : $\forall x \in \left[\frac{4}{7} \ln(2), +\infty \right[: 16e^{-7x} - 1 \leq 0$

و $\forall x \in \left[0, \frac{4}{7} \ln(2) \right] : 16e^{-7x} - 1 \geq 0$

نستنتج إذن أن : الدالة F تناقصية قطعا على المجال $\left[\frac{4}{7} \ln(2), +\infty \right[$ و

تزايدية قطعا على المجال $\left[0, \frac{4}{7} \ln(2) \right]$.

(2) أ - انبين أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$$

نعبر $x \in \mathbb{R}^+$

لدينا : $0 \leq x \leq t \leq 8x$ تكافئ : $0 \leq \sqrt[3]{t} \leq \sqrt[3]{8x}$

تكافئ : $0 \leq \sqrt[3]{t} \cdot e^{-t} \leq \sqrt[3]{8x} \cdot e^{-t}$

تكافئ : $0 \leq \int_x^{8x} \sqrt[3]{t} \cdot e^{-t} \cdot dt \leq \int_x^{8x} \sqrt[3]{8x} \cdot e^{-t} \cdot dt$

تكافئ : $0 \leq \int_x^{8x} \sqrt[3]{t} \cdot e^{-t} \cdot dt \leq \sqrt[3]{8x} \cdot \int_x^{8x} e^{-t} \cdot dt$

(III) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t) \cdot dt$

(1) أ - لدينا الدالة $t \rightarrow f(t)$ متصلة على المجال $[0, +\infty[$ إذن فهي تقبل دالة أصلية

F_0 ! إذن لكل x من $[0, +\infty[$ لدينا $F(x) = \int_x^{8x} f(t) \cdot dt = F_0(8x) - F_0(x)$

الدالة $x \rightarrow F_0(x)$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$.

الدالة $x \rightarrow 8x$ قابلة للإشتقاق على المجال \mathbb{R} إذن الدالة $x \rightarrow F_0(8x)$

قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$

و بالتالي الدالة $x \rightarrow F_0(8x) - F_0(x)$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$.

ب - تغيرات الدالة F :

لدينا : $F(x) = [F_0(x)]^{8x} = F_0(8x) - F_0(x)$

حيث F_0 دالة أصلية للدالة f .

إذن : $F'(x) = (F_0(8x))' - F_0'(x) = 8f(8x) - f(x)$

$$= 8\sqrt[3]{8x} \cdot e^{-8x} - \sqrt[3]{x} \cdot e^{-x} = \sqrt[3]{x} \cdot e^{-x} (16 \cdot e^{-7x} - 1)$$

إذن إشارة F' هي إشارة $(16 \cdot e^{-7x} - 1)$.

لدينا : $16e^{-7x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7} \ln(2)$

تكافئ : $0 \leq F(x) \leq 2\sqrt[3]{x} \cdot (-e^{-8x} + e^{-x})$

تكافئ : $0 \leq F(x) \leq 2\sqrt[3]{x} \cdot e^{-x} (1 - e^{-7x})$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$ *

ب - لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) = 0$

و حسب المتفاوتة * نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

ج - جدول تغيرات الدالة F .

x	0	$\frac{4}{7} \ln(2)$	$+\infty$
F'	+	0	-
F	0	$F(\frac{4}{7} \ln(2))$	0