تصحيح

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: **الرياضيات**

الشعبة: **العلوم الرياضية "أ" و "ب"**

التمرين الأول:

1)

أ)

- لتكن p و q أعدادا صحيحة نسبية حيث $p\wedge q=1$

إذن: $pu_0+qv_0=1 \qquad (\exists(u_0,v_0)\in\mathbb{Z}^2)$

- عكسيا:

لتكن p و q أعدادا صحيحة نسبية حيث $pu_0+qv_0=1 \qquad (\exists(u_0,v_0)\in\mathbb{Z}^2)$

ليكن $\delta=p\wedge q$

إذن: δ / p و δ / q

ومنه: δ / pu_0 و δ / qv_0

إذن: δ / pu_0+qv_0

وبالتالي: $\delta / 1$

إذن: $\delta=1$

و بالتالي: $p\wedge q=1$

ب)

لدينا: $(1) \quad \begin{cases} x_0\equiv aqv_0\,[p] \\ x_0\equiv bpu_0\,[q] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_0=bpu_0+aqv_0$

و من جهة أخرى لدينا: $\begin{cases} apu_0+aqv_0=a \\ bpu_0+bqv_0=b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad pu_0+qv_0=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} aqv_0=a-apu_0 \\ bpu_0=b-bqv_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aqv_0\equiv a\,[p] \\ bpu_0\equiv b\,[q] \end{cases} \qquad (2)$$

و من (1) و (2) نستنتج أن: $\begin{cases} x_0\equiv a\,[p] \\ x_0\equiv b\,[q] \end{cases}$

إذن: $x_0=bpu_0+aqv_0$ حل للنظمة (S).

2)

ليكن x حلا للنظمة (S)

ومنه: $\begin{cases} x\equiv a\,[p] \\ x\equiv b\,[q] \end{cases}$

تصحيح

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: **الرياضيات**

الشعبة: ***العلوم الرياضية "أ" و "ب"***

و بالتالي: $\begin{cases} x = \alpha p + a \\ x = \beta q + b \end{cases} \quad (\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2)$

إذن: $\begin{cases} xq = \alpha pq + aq \\ xp = \beta qp + bp \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} xq \equiv aq\,[pq] \\ xp = bp\,[pq] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xqv_0 \equiv aqv_0\,[pq] \\ xpu_0 = bpu_0\,[pq] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad xqv_0 + xpu_0 \equiv aqv_0 + bpu_0\,[pq]$$

$$\Rightarrow \quad x(qv_0 + pu_0) \equiv x_0\,[pq]$$

$$\Rightarrow \quad x \equiv x_0\,[pq]$$

$$\Rightarrow \quad x - x_0 \equiv 0\,[pq]$$

وبالتالي: pq يقسم $x - x_0$

(3

نفترض أن pq يقسم $x - x_0$

إذن: $x - x_0 \equiv 0\,[pq]$

$$\Rightarrow \quad x \equiv x_0\,[pq]$$

$$\Rightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad x = x_0 + kpq$$

$$\Rightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad x = aqv_0 + bpu_0 + kpq$$

$$\Rightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \begin{cases} x = q(av_0 + kp) + bpu_0 \\ x = p(bu_0 + kq) + aqv_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv bpu_0\,[q] \\ x \equiv aqv_0\,[p] \end{cases}$$

و بما أن: $pu_0 + qv_0 = 1$ فإن: $pu_0 = 1 - qv_0$ و $qv_0 = 1 - pu_0$

و منه: $\begin{cases} x \equiv b(1 - qv_0)\,[q] \\ x \equiv a(1 - pu_0)\,[p] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv b - bqv_0\,[q] \\ x \equiv a - apu_0\,[p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv b\,[q] \\ x \equiv a\,[p] \end{cases}$$

و بالتالي: x حل للنظمة (S).

(4

تصحيح

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: **الرياضيات**

الشعبة: **العلوم الرياضية "أ" و "ب"**

لدينا: pq يقسم $x-x_0$

ومنه: $x-x_0\equiv 0[pq]$

يعني: $x=x_0+kpq \qquad (\exists k\in\mathbb{Z})$

إذن: $x=aqv_0+bpu_0+kpq \qquad (\exists k\in\mathbb{Z})$

و بالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي:

$$\{x=aqv_0+bpu_0+kpq \ / k\in\mathbb{Z}\}$$

(5

*) الطريقة الأولى:

لدينا: $/(y,z)\in\mathbb{Z}^2 \qquad (S'):\begin{cases}x\equiv 1[8]\\x\equiv 3[13]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+8y\\x=3+13z\end{cases}$

إذن: $1+8y=3+13z$

و منه: $8y-13z=2$

نلاحظ أن $(-3,-2)$ حل خاص للمعادلة: $8y-13z=2$

و منه: $\begin{cases}8y-13z=2\\8.(-3)-13(-2)=2\end{cases}$

إذن: $8(y+3)=13(z+2)$

و منه: $8/13(z+2)$

و بما أن: $8\wedge 13=1$ فإن حسب $Gauss$ $8/z+2$

إذن: $z=8k-2 \qquad \exists k\in\mathbb{Z}$

و بالتعويض نحصل على: $y=13k-3$

و بالتالي: $(y,z)=(13k-3,8k-2)$

إذن: $\begin{cases}x=1+8y\\x=3+13z\end{cases}\Rightarrow x=104k-23 \ / k\in\mathbb{Z}$

و عكسيا: $x=104k-23 \ / k\in\mathbb{Z}$

إذن: $\begin{cases}104k-23\equiv 1[8]\\104k-23\equiv 3[13]\end{cases}$

و بالتالي مجموعة حلول النظمة (S') هي: $\{104k-23 \quad / k\in\mathbb{Z}\}$

*) الطريقة الثانية:

يمكن استعمال السؤال السابق بوضع:

$a=1$ و $b=3$ و $p=8$ و $q=13$.

التمرين الثاني:

(1

تصحيح

الامتحان *الوطني* الموحد *للبكالوريا*

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: ***الرياضيات***

الشعبة: ***العلوم الرياضية "أ" و"ب"***

A "الكرة المسحوبة بيضاء"

A_k " اختيار صندوق يحمل الرقم k "

لدينا: $$p(A)=\sum_{k=1}^{n}p(A\cap A_k)$$

و بما أن: $$\begin{cases} p(A\cap A_k)=p(A_k)\times p_{A_k}(A) \\ \forall k\in\{1,2,....,n\} \qquad p(A_k)=\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

فإن: $$\begin{aligned} p(A)&=\sum_{k=1}^{n}p(A_k)p_{A_k}(A)\\ &=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{A_k}(A)\\ &=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\\ &=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\end{aligned}$$

إذن: $p(A)=\dfrac{n+1}{2n}$ (لأن $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$)

(2

لدينا: n فردي أكبر من أو يساوي 3 إذن $n=2\alpha+1\succ 2$

B " الصندوق يحمل رقما فرديا"

بما أن عدد الصناديق هو n و عدد الصناديق التي تحمل رقما فرديا هو $\alpha+1$

فإن: $$p(B)=\frac{\alpha+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$$

(3

C "الحصول على كرة بيضاء من صندوق رقمه فردي"

لدينا: $$\begin{aligned} p(C)&=p_B(A)\\ &=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\end{aligned}$$

إذن: $$\begin{aligned}\frac{p(A\cap B)}{p(B)}&=\frac{p\left(\bigcup_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(A\cap A_{2k+1})\right)}{p(B)}\\ &=\frac{\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}p(A\cap A_{2k+1})\right)}{p(B)}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} p_{A_{2k+1}}(A).p(A_{2k+1})}{p(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} 2k+1\right)}{\frac{n+1}{2n}}$$

$$=\frac{(1+3+5+......+n)}{n^2}\times\frac{2n}{n+1}$$

$$=\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2\left(\frac{2n}{n+1}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2n}$$

و بالتالي: $p(C)=\frac{n+1}{2n}$

التمرين الثالث:

(1

أ)

لدينا: $M(z)\in(P)\Leftrightarrow z^2+\overline{z^2}-\left|z^2\right|=1$

$$\Leftrightarrow x^2+2ixy-y^2+x^2-2ixy-y^2-x^2-y^2=1$$

$$\Leftrightarrow x^2-3y^2=1$$

إذن: $(H): x^2-3y^2=1$

ب)

لدينا: $(H): x^2-3y^2=1$

إذن: $(H): x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$

و بالتالي: (H) هذلول مركزه $O(0,0)$.

- الرأسان:

$A(1,0)$ و $A'(-1,0)$

- المقاربان:

$(\Delta): y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ و $(\Delta'): y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

ج)

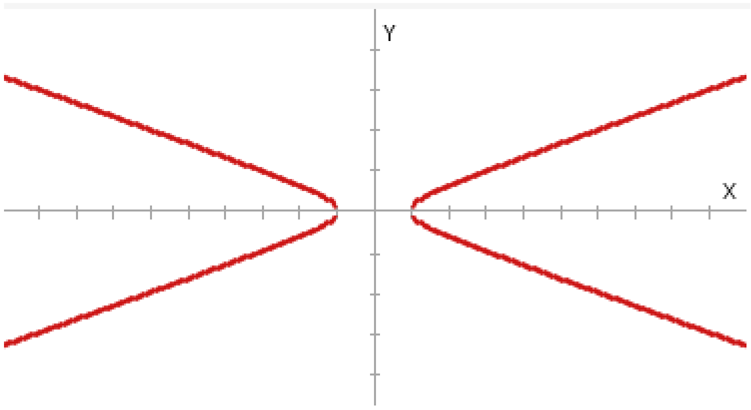
تصحيح

الامتحان *الوطني الموحد للبكالوريا*

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: ***الرياضيات***

الشعبة: ***العلوم الرياضية "أ" و "ب"***



(2

أ-

لدينا: $\varphi(z,z')=z\overline{z'}+\overline{z}z'-\overline{zz'}$

نضع: $\begin{cases} z=x+iy \\ z'=x'+iy' \end{cases}$

ومنه:

$$\begin{aligned}\varphi(z,z')&=(x+iy)(x'-iy')+(x-iy)(x'+iy')-(x-iy)(x'-iy')\\&=xx'-ixy'+iyx'+yy'+xx'+ixy'-ix'y+yy'-xx'+ixy'+ix'y+yy'\\&=xx'+3yy'+i(xy'+x'y)\end{aligned}$$

إذن: $\begin{cases} \mathrm{Re}(\varphi(z,z'))=xx'+3yy' \\ \mathrm{Im}(\varphi(z,z'))=xy'+x'y \end{cases}$

و لدينا:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}^2(\varphi(z,z'))-3\,\mathrm{Im}^2(\varphi(z,z'))&=(xx'+3yy')^2-3(xy'+x'y)^2\\&=x^2x'^2+6xx'yy'+9y^2y'^2-3x^2y'^2-6xy'x'y-3x'^2y^2\\&=x^2x'^2+9y^2y'^2-3x^2y'^2-3x'^2y^2\\&=(x^2-3y^2)(x'^2-3y'^2)\end{aligned}$$

وبما أن: $\begin{cases} M(z)\in(H) \\ M(z')\in(H) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3y^2=1 \\ x'^2-3y'^2=1 \end{cases}$

فإن: $(x^2-3y^2)(x'^2-3y'^2)=1\times1=1$

إذن: $\mathrm{Re}^2(\varphi(z,z'))-3\,\mathrm{Im}^2(\varphi(z,z'))=1$

و بالتالي: $M(\varphi(z,z'))\in(H)$

ب)

تصحيح

الامتحان *الوطني* الموحد *للبكالوريا*

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: ***الرياضيات***

الشعبة: ***العلوم الرياضية "أ" و "ب"***

(*

لدينا: $\varphi(z,1) = z + \overline{z} - \overline{z}$

$= z$

(*

لدينا: $\varphi(z,\overline{z}) = zz + \overline{zz} - \overline{z}z$

$= z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2$

$= 1$

(3

<u>التبادلية:</u>

ليكن $M(z)$ و $M(z')$ من (H)

لدينا: $M(z) * M(z') = M(\varphi(z,z'))$

$= M(z\overline{z'} + \overline{z}z' - \overline{zz'})$

$= M(\overline{z}z' + z\overline{z'} - \overline{z'z})$

$= M(z'\overline{z} + \overline{z'}z - \overline{z'z})$

$= M(\varphi(z',z))$

$= M(z') * M(z)$

إذن القانون "*" تبادلي في (H)

<u>التجميعية:</u>

ليكن $M(z)$ و $M(z')$ و $M(z'')$ من (H)

لدينا: $(M(z) * M(z')) * M(z'') = M(\varphi(z,z')) * M(z'')$

$= M(z\overline{z'} + \overline{z}z' - \overline{zz'}) * M(z'')$

$= M((z\overline{z'} + \overline{z}z' - \overline{zz'})\overline{z''} + \overline{(z\overline{z'} + \overline{z}z' - \overline{zz'})}z'' - \overline{(z\overline{z'} + \overline{z}z' - \overline{zz'})z''}$

$= M(z\overline{z'z''} + \overline{z}z'\overline{z''} - \overline{zz'z''} + \overline{z}z'z'' + z\overline{z'}z'' - zz'z'' - \overline{z}z'\overline{z''} - z\overline{z'z''} + zz'\overline{z''})$

$= M(-\overline{zz'z''} + \overline{z}z'z'' + z\overline{z'}z'' - zz'z'' + zz'\overline{z''})$

و لدينا: $M(z) * (M(z') * M(z'')) = M(z) * M(\varphi(z',z''))$

$= M(z) * M(z'\overline{z''} + \overline{z'}z'' - \overline{z'z''})$

$= M(z\overline{(z'\overline{z''} + \overline{z'}z'' - \overline{z'z''})} + \overline{z}(z'\overline{z''} + \overline{z'}z'' - \overline{z'z''}) - \overline{z(z'\overline{z''} + \overline{z'}z'' - \overline{z'z''})})$

$= M(z\overline{z'}z'' + zz'\overline{z''} - zz'z'' + \overline{z}z'\overline{z''} + \overline{z}\overline{z'}z'' - \overline{zz'z''} - \overline{zz'}z'' - \overline{z}z'\overline{z''} + \overline{z}z'z'')$

$= M(z\overline{z'}z'' + zz'\overline{z''} - zz'z'' - \overline{zz'z''} + \overline{z}z'z'')$

$= M(-\overline{zz'z''} + \overline{z}z'z'' + z\overline{z'}z'' - zz'z'' + zz'\overline{z''})$

$= (M(z) * M(z')) * M(z'')$

إذن القانون "*" تجميعي في (H).

<u>العنصر المحايد:</u>

ليكن $M(z)$ من (H)

لدينا: $M(z) * M(1) = M(\varphi(z,1)) = M(z)$

إذن: $M(1)$ هو العنصر المحايد في $(H,*)$

تصحيح

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة الإستدراكية 2007)

المادة: *الرياضيات*

الشعبة: *العلوم الرياضية "أ" و "ب"*

المماثل:

ليكن $M(z)$ من (H)

لدينا: $M(z)*M(z')=M(1)\Leftrightarrow M(z\overline{z'}+\overline{z}z'-\overline{zz'})=M(1)$

$\Leftrightarrow M(\varphi(z,z'))=M(\varphi(z,\overline{z}))$

إذن كل عنصر $M(z)$ من (H) يقبل مماثلا هو: $M(\overline{z})$.

وبالتالي: $(H,*)$ زمرة تبادلية.

التمرين الرابع:

1)

أ)

- لنبين أن $(F,+)$ زمرة تبادلية

من أجل ذلك سنبين أنها زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(M_2(\mathbb{R}),+)$

لدينا: $F\neq\varnothing$ (لأن $\theta\in F$ من أجل $a=b=0$)

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(a',b')}$ من F

لدينا:
$$M_{(a,b)}-M_{(a',b')}=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a'+b' & -b' \\ 5b' & a'-3b' \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a-a'+b-b' & -(b-b') \\ 5(b-b') & a-a'-3(b-b') \end{pmatrix}$$
$$=M_{(a-a',b-b')}$$

و بما أن: $(a-a',b-b')\in\mathbb{R}^2$

فإن: $M_{(a,b)}-M_{(a',b')}\in F$

إذن: $(F,+)$ زمرة تبادلية

- الإستقرار في $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

ليكن $M_{(a,b)}$ من F و λ من $\mathbb{R}$

لدينا:
$$\lambda M_{(a,b)}=\lambda\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \lambda a+\lambda b & -\lambda b \\ 5\lambda b & \lambda a-3\lambda b \end{pmatrix}$$
$$=M_{(\lambda a,\lambda b)}$$

و بما أن: $(\lambda a,\lambda b)\in\mathbb{R}^2$

فإن: $\lambda M_{(a,b)}\in F$

و بما أن: $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي فإن:

$$(\forall M\in F)\qquad 1.M=M$$
$$(\forall M\in F)(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)\qquad (\alpha\beta).M=\alpha.(\beta.M)$$
$$(\alpha+\beta).M=\alpha M+\beta M$$

تصحيح

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة الإستدراكية 2007)

المادة: **الرياضيات**

الشعبة: **العلوم الرياضية "أ" و "ب"**

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall (M, M') \in F) \qquad \alpha.(M+M') = \alpha.M + \alpha.M'$$

إذن: $(F,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

ب)

*)

- نبين أن (I,J) أسرة مولدة لـ F:

لدينا:

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 5b & -3b \end{pmatrix}$$
$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= aI + bJ$$

إذن (I,J) أسرة مولدة لـ F.

- نبين أن (I,J) أسرة حرة:

ليكن $(a;b)$ من $\mathbb{R}^2$

لدينا:

$$aI + bJ = \theta$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ a-3b=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a = b = 0$$

إذن (I,J) أسرة حرة.

و بالتالي: (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(F,+,\cdot)$.

*)

بعده: $\dim F = 2$.

2)

ليكن α من $\mathbb{C}$

نضع $\alpha = \sigma + i\beta$ حيث $(\sigma,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

لدينا: $(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad (\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2) / z = x+iy$

ليكن x' و y' من $\mathbb{R}$

لدينا:

$$z = x' + \alpha y' \Leftrightarrow x + yi = x' + \alpha y'$$
$$\Leftrightarrow x + iy = x' + y'(\sigma + i\beta)$$
$$\Leftrightarrow x + iy = x' + y'\sigma + iy'\beta$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + y'\sigma \\ y = y'\beta \end{cases}$$

تصحيح

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: **الرياضيات**

الشعبة: **العلوم الرياضية "أ" و "ب"**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + \dfrac{\sigma y}{\beta} \\ y' = \dfrac{y}{\beta} \end{cases} \qquad (\beta \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - \dfrac{\sigma y}{\beta} \\ y' = \dfrac{y}{\beta} \end{cases}$$

وبالتالي: $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad (\exists!(x', y') \in \mathbb{R}^2) \quad / z = x'1 + y'\alpha$

ومنه فإن: $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, .)$

(3

أ)

(*

لدينا:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-5 & -1+3 \\ 5-15 & -5+9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= -2(I + J)$$

(*

لدينا: $J = M_{(0,1)}$

و لدينا: $\psi(\alpha) = M_{(0,1)}$

إذن: $\psi(\alpha) = J$

ب)

- التشاكل:

لدينا:

$$\psi(z \times z') = \psi((a + \alpha b) \times (c + \alpha d))$$
$$= \psi(c(a + \alpha b) + d\alpha(a + \alpha b))$$
$$= \psi(ac + ab\alpha + d\alpha(a + \alpha b))$$
$$= \psi(ac + bc\alpha + ad\alpha + bd\alpha^2)$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\psi(z) \times \psi(z') = M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}$$
$$= M_{(ac-2bd,\, ad+bc-2bd)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi((ac-2bd)+\alpha(ad+bc-2bd)) \\
&= \psi(ac-2bd+\alpha ad+\alpha bc-2\alpha bd) \\
&= \psi(ac+bc\alpha+ad\alpha+bd(-2\alpha-2))
\end{aligned}
$$

إذن سيكون ψ تشاكلا تقابليا إذا وفقط إذا كان $\alpha^2=-2\alpha-2$

لدينا: $\alpha^2+2\alpha+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2=-2\alpha-2$

$$\Delta'=-1=i^2$$

$$\begin{cases} \alpha_1=-1+i \\ \alpha_2=-1-i \end{cases}$$

- التقابل:

التباينية:

لدينا: $M_{(a,b)}=M_{(c,d)} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(z)=\psi(z')$

$$\Rightarrow \quad a=c \quad et \quad b=d$$

إذن: ψ تبايني.

الشمولية:

لدينا: $\psi(z)=M \qquad (\exists z\in\mathbb{C}) \qquad (\forall M\in F)$

إذن: ψ شمولي.

وبالتالي: ψ تقابل من $\mathbb{C}$ نحو F.

إذن قيمتي α التي يكون من أجلهما التطبيق ψ تشاكلا تقابليا هما:

$$\begin{cases} \alpha_1=-1+i \\ \alpha_2=-1-i \end{cases}$$

4)

لدينا: $J^{2007}=\psi(\alpha)^{2007}$

و بما أن: ψ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(F,\times)$

فإن: $\psi(\alpha)^{2007}=\psi(\alpha^{2007})$

إذن:

$$
\begin{aligned}
J^{2007} &= \psi(\alpha^{2007}) \\
&= \psi((-1+i)^{2007}) \\
&= \psi\left(\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]^{2007}\right) \\
&= \psi\left(\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{3\pi}{4}2007\right]\right) \\
&= \psi\left(\sqrt{2}^{2007}\left(\cos 2007.\frac{3\pi}{4}+i\sin 2007.\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&= \psi\left(\sqrt{2}^{2007}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}
$$

تصحيح

الامتحان *الوطني الموحد للبكالوريا*

(الدورة الإستدراكية 2007)

المادة: ***الرياضيات***

الشعبة: ***العلوم الرياضية "أ" و "ب"***

$$\begin{aligned}
&= \psi\left(\sqrt{2}^{2007}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\\
&= \psi\left(-2^{2003}-i2^{2003}\right)\\
&= \psi\left(-2^{2004}-2^{2003}(-1+i)\right)\\
&= \psi\left(-2^{2004}+\alpha\left(-2^{2003}\right)\right)\\
&= M(-2^{2004},-2^{2003})\\
&= -2^{2004}I-2^{2003}J
\end{aligned}$$

التمرين الخامس:

(I

(1

(أ

$$g'(x)=1+e^{-x} \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$$

لدينا: $1+e^{-x}\geq 0 \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$

إذن:

- g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

(ب

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x-e^{-x}=+\infty$

و لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x-e^{-x}$

$$=-\infty$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(ج

تصحيح
الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: **الرياضيات**

الشعبة: **العلوم الرياضية "أ" و "ب"**

لدينا: g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$

وبالتالي: $g(x_0)=0 \qquad (\exists! x_0\in\mathbb{R})$

وبما أن: $g(0)=0$

فإن: $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$

(2

أ)

❖ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x-e^{-x}} =\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)} =0$$

❖ $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)} =0$$

❖ $$\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{1}{1+x-e^{-x}} =+\infty$$

❖ $$\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{1}{1+x-e^{-x}} =-\infty$$

ب)

لدينا: $$f'(x)=\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =\frac{-g'(x)}{g^2(x)} =\frac{-(e^{-x}+1)}{(1+x-e^{-x})^2} \qquad (\forall x\in\mathbb{R}^*)$$

ج)

لدينا: $f'(x)$ لها عكس إشارة $e^{-x}+1$

إذن: $f'(x)\prec 0 \qquad (\forall x\in\mathbb{R}^*)$

تصحيح

الامتحان *الوطني الموحد للبكالوريا*

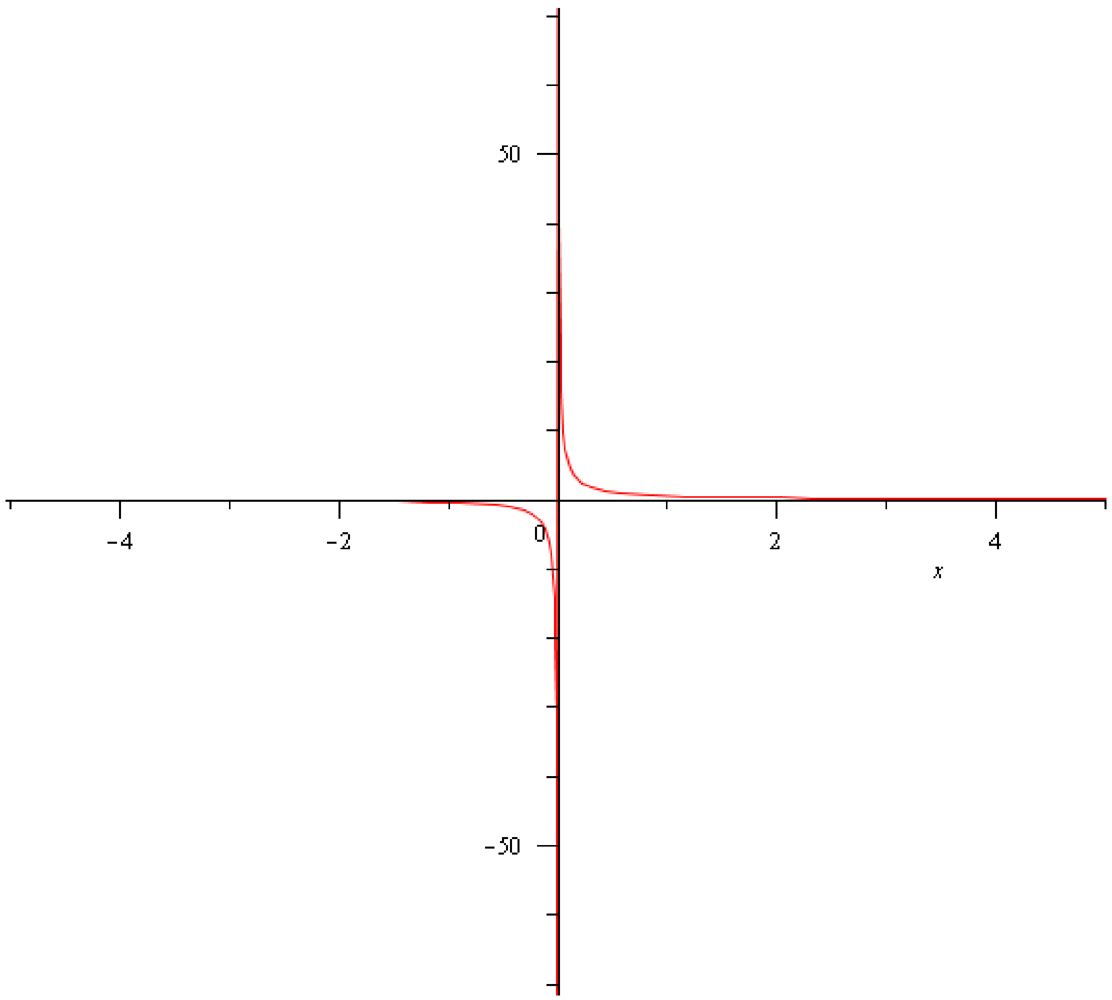
(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: ***الرياضيات***

الشعبة: ***العلوم الرياضية "أ" و"ب"***

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	0 ↘ $-\infty$		||	$+\infty$ ↘ 0	

د)



تصحيح

الامتحان *الوطني الموحد للبكالوريا*

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: ***الرياضيات***

الشعبة: ***العلوم الرياضية "أ" و "ب"***

(3

أ)

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ ب: $k(x) = f(x) - n$

لدينا: $k'(x) = f'(x)$

إذن: k تناقصية على $\mathbb{R}^{*+}$.

و لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} k(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -n \end{cases}$

و بما أن: $-n \prec 0$ و k تناقصية على $\mathbb{R}^{*+}$. فإن: $k(x_n) = 0 \quad (\exists! x_n \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\Leftrightarrow (\exists! x_n \in]0,+\infty[) \qquad f(x_n) = n$$

ب)

لدينا: $f(x_{n+1}) - f(x_n) = n + 1 - n = 1$

إذن: $f(x_{n+1}) - f(x_n) \succ 0$

وبما أن: الدالة f تناقصية فإن $x_{n+1} - x_n \le 0$

إذن: $(x_n)_{n\ge 1}$ تناقصية.

لدينا المتتالية $(x_n)_{n\ge 1}$ تناقصية و مصغورة ب 0

إذن فهي متقاربة.

ج)

لدينا: $g(x) - x = 1 + x - e^{-x} - x$

$$= 1 - e^{-x}$$

و: $1 - e^{-x} \succ 0 \qquad (\forall x \succ 0)$

إذن: $g(x) \succ x \qquad (\forall x \succ 0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \succ \frac{1}{g(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) \prec \frac{1}{x}$$

و بما أن: $x_n \succ 0$ فإن: $f(x_n) \prec \frac{1}{x_n}$

إذن: $n \prec \frac{1}{x_n}$

وبالتالي: $x_n \prec \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow 0 \prec x_n \prec \frac{1}{n}$$

وبما أن: $\lim \frac{1}{n} = 0$ فإن: $\lim x_n = 0$

(II

(1

(أ

لدينا:
$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x-e^{-x}}=1$$
$$\Leftrightarrow 1+x-e^{-x}=1$$
$$\Leftrightarrow x-e^{-x}=0$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}=x$$

(ب

لدينا: $f(x)=1 \Leftrightarrow e^{-x}=x$
$$\Rightarrow x = x_1$$

إذن المعادلة $e^{-x}=x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$.

نعتبر الدالة l المعرفة ب: $l(x)=e^{-x}-x$

لدينا:
$$\begin{cases} l(1)=\frac{1}{e}-1 \prec 0 \\ l\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}}-\frac{1}{e} \succ 0 \end{cases}$$

إذن: $l(1) \le l(\alpha) \le l\left(\frac{1}{e}\right)$

وبما أن الدالة l تناقصية قطعا على $\left[\frac{1}{e},1\right]$

إذن: $\frac{1}{e} \le \alpha \le 1$

(2

(أ

- <u>أساس الترجع:</u>
من أجل: $n=1$
لدينا: $\frac{1}{e} \le y_1 = 1 \le 1$

- <u>فرضية الترجع:</u>
ليكن $n \in \mathbb{N}^*$
نفترض أن $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$

تصحيح

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: **الرياضيات**

الشعبة: **العلوم الرياضية "أ" و "ب"**

و نبين أن: $\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le 1$

لدينا: $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$

ومنه: $-1 \le -y_n \le -\frac{1}{e}$

يعني: $e^{-1} \le e^{-y_n} \le e^{-\frac{1}{e}}$

إذن: $\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le e^{-\frac{1}{e}}$

و بما أن: $-\frac{1}{e} \prec 0$ فإن: $e^{-\frac{1}{e}} \prec 1$

و بالتالي: $\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le 1$

إذن: $\frac{1}{e} \le y_n \le 1 \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب)

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة h المعرفة ب: $h(x) = e^{-x}$

ليكن I المجال الذي طرفاه y_n و α

لدينا: h دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على I.

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية:

$$(\exists c \in I) \qquad |h(y_n) - h(\alpha)| = |h'(c)||(y_n - \alpha)|$$

$$(1) \qquad |y_{n+1} - \alpha| = |h'(c)(y_n - \alpha)| \qquad (\exists c \in I) \qquad \Rightarrow$$

ولدينا: $-1 \le -c \le -\frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e} \le c \le 1$

$$\Rightarrow \quad e^{-1} \le e^{-c} \le e^{-\frac{1}{e}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e} \le e^{-c} \le e^{-\frac{1}{e}}$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-\frac{1}{e}} \le -e^{-c} \le -\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-\frac{1}{e}} \le h'(c) \le -\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \quad |h'(c)| \le e^{-\frac{1}{e}}$$

وبالتالي: $|y_{n+1} - \alpha| = e^{-\frac{1}{e}}|y_n - \alpha| \qquad (\exists c \in I) \quad (1) \Rightarrow$

تصحيح
الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الإستدراكية2007)

المادة: **الرياضيات**

الشعبة: **العلوم الرياضية "أ" و "ب"**

إذن: $$|y_{n+1}-\alpha| = e^{-\frac{1}{e}}|y_n-\alpha| \qquad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

ج)

لدينا:

$$|y_2-\alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_1-\alpha|$$
$$|y_3-\alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_2-\alpha|$$
$$|y_4-\alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_3-\alpha|$$
" " " "
" " " "
$$|y_n-\alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_{n-1}-\alpha|$$

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على:

$$|y_n-\alpha| \le \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^{n-1}|y_1-\alpha|$$

ولدينا: $\lim e^{-\frac{n-1}{e}} = 0$

إذن: $(y_n)_{n\ge1}$ متقاربة و نهايتها: $\lim y_n = \alpha$

(III

(1

أ)

ليكن $t \succ 0$

لدينا: $-t \prec 0 \Rightarrow 1-e^{-t} \ge 0$

$\Rightarrow 1+t-e^{-t} \ge t$

و لدينا: $1+t \ge 1+t-e^{-t}$

إذن: $1+t \ge 1+t-e^{-t} \ge t$

و بالتالي: $$\frac{1}{1+t} \le f(t) \le \frac{1}{t}$$

ب)

ليكن $x \succ 0$

لدينا: $$\frac{1}{1+t} \le f(t) \le \frac{1}{t} \qquad (\forall t \succ 0)$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x}\frac{dt}{1+t} \le \int_x^{2x} f(t)dt \le \int_x^{2x}\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \left[\ln(1+t)\right]_x^{2x} \le F(x) \le \left[\ln(t)\right]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) \le F(x) \le \ln\left(\frac{2x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) \le F(x) \le \ln 2$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \ln 2$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ln 2$

2)

أ)

نعتبر الدوال المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب:

$q(t) = 1-t$

و $s(x) = e^{-t}$

و $y(x) = 1-t+\dfrac{t^2}{2}$

لدينا: q و s و y متصلة على $\mathbb{R}^+$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$.

ولدينا: $q(0) = s(0) = y(0) = 1$

و $q'(t) = -1$ و $s'(t) = -e^{-t}$ و $y'(t) = t-1$

و لدينا: $-1 \le -e^{-t} \le t-1 \qquad (\forall t \ge 0)$

$$\Rightarrow q'(t) \le s'(t) \le y'(t)$$

إذن حسب إحدى تطبيقات مبرهنة التزايدات المنتهية:

$$q(t) \le s(t) \le y(t) \qquad (\forall t \ge 0)$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \ge 0) \qquad 1-t \le e^{-t} \le 1-t+\frac{t^2}{2}$$

ب)

ليكن $t \succ 0$

لدينا: $(\forall t \ge 0) \qquad 1-t \le e^{-t} \le 1-t+\dfrac{t^2}{2}$

$$\Rightarrow (\forall t \ge 0) \qquad t-1-\frac{t^2}{2} \le -e^{-t} \le t-1$$

$$\Rightarrow (\forall t \ge 0) \qquad 2t-\frac{t^2}{2} \le 1+t-e^{-t} \le 2t$$

$$\Rightarrow (\forall t \in]0,4[) \qquad \frac{1}{2t} \le f(t) \le \frac{1}{2t-\frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow (\forall t \in]0,4[) \qquad \frac{1}{2t} \le f(t) \le \frac{2}{4t-t^2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \in]0,4[) \qquad \frac{1}{2t} \le f(t) \le \frac{8}{16t-4t^2}$$

$$\Rightarrow (\forall t\in]0,4[)\quad \frac{1}{2t}\le f(t)\le \frac{8-2t+2t}{16t-4t^2}$$
$$\Rightarrow (\forall t\in]0,4[)\quad \frac{1}{2t}\le f(t)\le \frac{1}{2t}+\frac{1}{8-2t}$$
$$\Rightarrow (\forall t\in]0,4[)\quad \frac{1}{2t}\le f(t)\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$$

ج)

لدينا: $(\forall t\in]0,4[)\quad \frac{1}{2t}\le f(t)\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{dt}{t}\le \int_x^{2x} f(t)dt\le \frac{1}{2}\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\ln t\right]_x^{2x}\le F(x)\le \frac{1}{2}\left(\left[\ln t\right]_x^{2x}+\left[\ln(4-t)\right]_x^{2x}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln 2\le F(x)\le \frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)\right)$$

و بما أن: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)\right)=\frac{1}{2}\ln 2$

فإن: $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\frac{1}{2}\ln 2=F(0)$

إذن: F متصلة على اليمين في 0.

3)

أ)

لدينا: f متصلة على $\mathbb{R}^{*+}$ و الدالتان $x\mapsto 2x$ و $x\mapsto x$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$
إذن: F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$.

*)

$$(\forall x\succ 0)\qquad F'(x)=2f(2x)-f(x)$$
$$=\left(\frac{2}{1+2x-e^{-2x}}\right)-\left(\frac{1}{1+x-e^{-x}}\right)$$
$$=\left(\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{e^{2x}g(x).g(2x)}\right)$$
$$=\frac{(e^{x}-1)^2}{e^{2x}g(x).g(2x)}$$

ب)

ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$
لدينا: $g(x).g(2x)\succ 0$

إذن: F تزايدية على $\mathbb{R}_+^*$