

□ الاتصال في نقطة:

$$f \text{ متصل في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

تعريف

الاتصال على اليمين - الاتصال على اليسار:

$$f \text{ متصل على اليمين في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ متصل على اليسار في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ متصل في } x_0 \Leftrightarrow f \text{ متصل على اليمين و على اليسار في } x_0$$

الاتصال على مجال:

تكون f متصل على مجال مفتوح $]a, b[$ إذا كانت f متصل في كل نقطة من المجال $]a, b[$

تكون f متصل على مجال مغلق $[a, b]$ إذا كانت f متصل على المجال المفتوح $]a, b[$ و متصل على اليمين a و متصل على اليسار b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

- الدوال $f + g$, $f \times g$, kf متصل على المجال I
- إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصل على \mathbb{R}
- كل دالة جذرية متصل على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصل على \mathbb{R}^+
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على \mathbb{R}
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصل على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f متصل على مجال I و g متصل على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$ فإن: $g \circ f$ متصل على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

- صورة قطعة بدالة متصل هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصل هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصل و رتيبة قطعا على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

| المجال f(I) | | المجال I |
|---|---|-----------------|
| f تناقصية قطعاً على I | f تزايدية قطعاً على I | |
| $[f(b); f(a)]$ | $[f(a); f(b)]$ | $[a, b]$ |
| $\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$ | $\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$ | $[a, b[$ |
| $\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$ | $\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$ | $]a, b]$ |
| $\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$ | $\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$ | $]a, b[$ |
| $\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$ | $\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$ | $[a, +\infty[$ |
| $\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$ | $\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$ | $]a, +\infty[$ |
| $\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$ | $\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$ | $] -\infty, a]$ |
| $\left[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$ | $\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right]$ | $] -\infty, a[$ |
| $\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$ | $\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$ | \mathbb{R} |

← مبرهنة القيم الوسيطة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عد حقيقي α من المجال $[a, b]$ بحيث: $f(\alpha) = \beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$
إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

← طريقة التفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال $[a, b]$ بحيث: $f(a) \times f(b) < 0$ وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

| |
|---|
| إذا كان: $f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ |
| فإن: $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$ وهذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ |
| يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α |

| |
|---|
| إذا كان: $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ |
| فإن: $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ وهذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ |
| يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α |

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها