الدوال الأسية (محمد الكيال)

الدالة الأسية النبيرية

تعريف:

الدالة $x \mapsto e^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\ln$ و تسمى الدالة الأسية النبيرية

استنتاجات وخاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\ln e^x = x$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $(e^x)^r = e^{rx}$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad e^{\ln x} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$	

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

استنتاجات:

$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n} = +\infty$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [u(x)]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = +\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

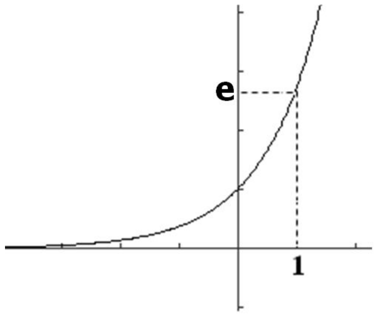
الاتصال:

الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة على $\mathbb{R}$
إذا كانت دالة u متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق

الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $\left(e^x\right)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	إذا كانت دالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad \forall x \in I$

التمثيل المبياني:



الدالة الأسية للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة $x \mapsto a^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\log_a$ و تسمى الدالة الأسية للأساس a

استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x\ln a}$ $\log_a\left(a^x\right) = x$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $(r \in \mathbb{Q}) \quad \left(a^x\right)^r = a^{rx}$ $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad a^{\log_a x} = x$	
$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$	

نهايات و متراجحات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

المشتقة:

$$\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x$$