الدوال اللوغارتمية (محمد الكيال)

الدالة اللوغاريتم النبيري:

تعريف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1
ويرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\ln e = 1$; $\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$	$\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r\ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\ln x^n = n\ln|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$

النهايات:

نهايات أساسية: $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

استنتاجات:

$\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim_{x\to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

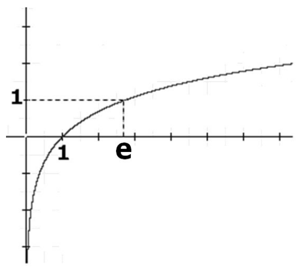
الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$
إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$	إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ قابلة للاشتقاق على المجال I ولدينا: $\left(\ln\left[u(x)\right]\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ $\quad \forall x \in I$

التمثيل المبياني:



إشارة $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+

الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: $\log_a$ حيث: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$

حالة خاصة: الدالة ℓog_{10} تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها كذلك بالرمز: ℓog

استنتاجات و خاصيات:

$\ell og_a 1 = 0$ $\ell og_a a = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ell og_a xy = \ell og_a x + \ell og_a y$ $(r \in \mathbb{Q})\ \ell og_a x^r = r\ell og_a x$ $\ell og_a \frac{1}{x} = -\ell og_a x$ $\ell og_a \left(\frac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\ell og_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

نهايات و متراجحات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$	$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim_{x\to+\infty} \ell og_a x = +\infty$ $\lim_{x\to 0^+} \ell og_a x = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \ell og_a x = -\infty$ $\lim_{x\to 0^+} \ell og_a x = +\infty$

المشتقة:

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$