الاحتمالات (محمد الكيال)

مصطلحات

المصطلح الاحتمالي	معناه
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω كون الإمكانيات	هي مجموعة الإمكانيات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	A جزء من كون الإمكانيات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصرا وحيدا
تحقق الحدث $A\cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A\cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معا
الحدث المضاد للحدث A	هو الحدث $\overline{A}$ $\left(A\cap\overline{A}=\varnothing \text{ و } A\cup\overline{A}=\Omega\right)$
A و B حدثان غير منسجمين	$A\cap B=\varnothing$

استقرار حدث - احتمال حدث:

تعريف:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- عندما يستقر احتمال حد ث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو: p_i

ونكتب: $P(\{\omega_i\})=p_i$

- احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث

أي إذا كان $A=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...;\omega_n\}$ حدثا من Ω فإن احتمال الحدث A هو:

$$p(A)=p(\omega_1)+p(\omega_2)+p(\omega_3)+...+p(\omega_n)$$

خاصيات:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- $p(\varnothing)=0$ و $p(\Omega)=1$
- $0\le p(A)\le 1$ لكل حدث A من Ω
- احتمال اتحاد حدثين:

لكل حدثين A و B من Ω

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ إذا كان A و B غير منسجمين

- احتمال الحدث المضاد:

لكل حدث A من Ω هو: $p(\overline{A})=1-p(A)$

فرضية تساوي الاحتمالات:

تعريف:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω

فإن احتمال كل حدث A من Ω هو: $p(A)=\dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$

الاحتمال الشرطي- استقلالية حدثين:

تعريف:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A)\neq 0$

احتمال حدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد: $p_A(B)=p\left(B/A\right)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

نتيجة:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A)\times p(B)\neq 0$

لدينا: $p(A\cap B)=p(A)\times p\left(B/A\right)=p(B)\times p\left(A/B\right)$

تعريف:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)\Leftrightarrow A$ و B حدثان مستقلان

خاصية:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزيئا لـ Ω

$(\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$ و $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega)$

لكل حدث A من Ω:

$$p(A)=p(\Omega_1)\times p\left(A/\Omega_1\right)+p(\Omega_2)\times p\left(A/\Omega_2\right)$$

قانون احتمال متغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا على كون إمكانيات تجربة عشوائية Ω

لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المرحلتين التاليتين:

- تحديد $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$: مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
- نحسب الاحتمال $p(X=x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1;2;...;n\}$

الأمل الرياضي- المغايرة- الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا قانونه معرف بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

تعاريف:

الأمل الرياضي للمتغير X	$E(X)=x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3+...+x_n\times p_n$
المغايرة للمتغير X	$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$
الانحراف الطرازي للمتغير X	$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

القانون الحداني:

ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية

نعيد هذه التجربة n مرة

المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A يسمى توزيعا حدانيا وسيطاه n و p

ولدينا: $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}\quad \forall k\in\{0;1;2;...;n\}$

و $E(X)=n\times p$

و $V(X)=np(1-p)$