المتتاليات العددية (محمد الكيال)

المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية

	لمتتالية حسابية	لمتتالية هندسية
تعريف	$u_{n+1} = u_n + r$ r هو الأساس	$u_{n+1} = q \times u_n$ q هو الأساس
الحد العام	$u_n = u_p + (n-p)r$ $(p \le n)$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ $(p \le n)$
مجموع حدود متتابعة	$u_p + \ldots + u_n = (n-p+1) \times \left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$	$u_p + \ldots + u_n = u_p \times \left(\dfrac{q^{n-p+1} - 1}{q-1}\right)$ $(q \ne 1)$
a و b و c ثلاثة حدود متتابعة	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة بالعدد M $\Leftrightarrow \forall n \in I \qquad u_n \le M$
- $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة بالعدد m $\Leftrightarrow \forall n \in I \qquad u_n \ge m$
- $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

رتابة متتالية عددية:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية $\Leftrightarrow \forall n \in I \qquad u_{n+1} \le u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \qquad u_{n+1} \ge u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة $\Leftrightarrow \forall n \in I \qquad u_{n+1} = u_n$

ملاحظة:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية حدها الأول: u_p

- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية فإن: $u_n \le u_p \qquad \forall n \in I$
- إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية فإن: $u_n \ge u_p \qquad \forall n \in I$

نهاية متتالية:

- نهاية المتتالية $\left(n^{\alpha}\right)$ حيث: $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$

- نهاية المتتالية الهندسية $\left(q^{n}\right)$ حيث: $q \in \mathbb{R}$:

$q \le -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
المتتالية $\left(q^{n}\right)$ ليس لها نهاية	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n} = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n} = +\infty$

مصاديق التقارب:

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

$$\left.\begin{array}{l} v_n \le u_n \le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|u_n - \ell\right| \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \ge v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

متتالية من النوع $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$:

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \end{cases}$$

حيث f دالة متصلة على مجال I بحيث $f\left(I\right) \subset I$ و a عنصرا من I

إذا كانت $\left(u_n\right)$ متقاربة فإن نهايتها ℓ حل للمعادلة $f\left(x\right) = x$