ثانوية الفتح - الخميسات	المجموعة $\mathbb{N}$ و مبادئ في الحسابيات	الجذع المشترك العلمي
Année scolaire 2007/2008	L'ensemble $\mathbb{N}$ et Notions d'Arithmétique	Prof : A.BEN ELKHATIR

الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية

■ **تعريف:**

كل عدد صحيح طبيعي n يكتب على الشكل $n=2k$ حيث $k\in\mathbb{N}$ يسمى عدد زوجيا .

و كل عدد صحيح طبيعي n يكتب على الشكل $n=2k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$ يسمى عددا فرديا .

■ **ملحوظات:**

يرمز بالرمز P إلى مجموعة الأعداد الزوجية و بالرمز I إلى مجموعة الأعداد الفردية

إذن : $P=\{2k/k\in\mathbb{N}\}$ و $I=\{2k+1/k\in\mathbb{N}\}$

بمعنى أن : $P=\{0;2;4;6;....;\to\}$ و $I=\{1;3;5;7;....;\to\}$.

و لاحظ أن : كل عدد صحيح طبيعي يكون إما زوجيا و إما فرديا ، نقول إن المجموعتين P و I تكونان تجزيئا للمجموعة $\mathbb{N}$.

قواسم و مضاعفات عدد صحيح طبيعي

■ **تعريف:**

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا .

نقول إن عدد صحيح طبيعي m مضاعف ل a إذا وجد k من $\mathbb{N}$ بحيث $m=ka$.

و نرمز بالرمز $a\mathbb{N}$ إلى مجموعة مضاعفات a .

و نقول إن عدد صحيح طبيعي غير منعدم d قاسم ل a إذا وجد q من $\mathbb{N}$ بحيث $a=qd$.

نكتب $d\mid a$ و نرمز بالرمز $Div(a)$ إلى مجموعة قواسم a .

و لاحظ أن : m مضاعف ل a إذا و فقط إذا كان a قاسما ل m ، بمعنى أن :

$m\in a\mathbb{N}$ يكافئ $a\in Div(m)$.

■ **ملحوظات:**

لاحظ أن 0 مضاعف لأي عدد صحيح طبيعي a لأن : $0=0\times a$ مهما يكن a من $\mathbb{N}$.

و أن 0 لا يقسم أي عدد صحيح طبيعي غير منعدم a لأن : $a\times q\neq 0$ مهما يكن q من $\mathbb{N}$.

لكل عدد صحيح طبيعي a قاسمين على الأقل هما 1 ، إذن $\{1;a\}\subset Div(a)$ لكل a من $\mathbb{N}$.

تطبيقات

■ **تمرين01:**

1)- حدد لائحة قواسم كل عدد من الأعداد التالية: 72 ، 75 ، 83 ، 120 ، 125 ، 150 و 200 .

2)- حدد لائحة قواسم كل عدد من الأعداد التالية : $a=78$ ، $b=5\times 78$ و $c=7\times 78$.

3)- حدد مضاعفات العدد 21 المحصورة بين 100 و 250 .

4)- كم هو عدد مضاعفات العدد 17 المحصورة بين 1000 و 2500 ؟

■ **تمرين02:**

نعتبر العدد الصحيح الطبيعي : $n=2^{10}\times 5^8$.

1)- تحقق أن n مربع لعدد يجب تحديده ، و أن $20n$ مكعب لعدد يجب تحديده أيضا .

2)- تحقق أن العدد $d=2^8\times 5^7$ قاسم ل n و أن العدد $m=2^{12}\times 5^8\times 7$ مضاعف ل n .

■ **تمرين03:**

خذ عددا صحيحا طبيعيا مكون من ثلاثة أرقام ثم ضع جانبه نفس العدد فنحصل على عدد a مكون من ستة أرقام .

حدد b خارج قسمة a على 7 ، ثم حدد c خارج قسمة b على 11 و أخيرا حدد d خارج قسمة c على 13 . ماذا تلاحظ ؟

■ **تمرين04:**

1)- حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ التي يكون من أجلها على التوالي :

$(1): n\mid n+8$ ، $(2): n-1\mid n+11$ و $(3): n-4\mid 3n+24$.

2)- حدد جميع أزواج الأعداد الصحيحة الطبيعية (x,y) التي تحقق : $(E): x^2-y^2=24$.

مصاديق قابلية القسمة على 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 9 و 25

نعتبر العدد الصحيح الطبيعي : $N=57364$.

لدينا : $N=4+6\times 10+3\times 10^2+7\times 10^4+5\times 10^5$ ، و بصفة عامة كل عدد صحيح طبيعي n يكتب على الشكل : $c_0+c_1\times 10+c_2\times 10^2+...+c_r\times 10^r$

نكتب : $n=\overline{c_r...c_2c_1c_0}$.

ثانوية الفتح - الخميسات	المجموعة $\mathbb{N}$ و مبادئ في الحسابيات	الجذع المشترك العلمي
Année scolaire 2007/2008	L'ensemble $\mathbb{N}$ et Notions d'Arithmétique	Prof : A.BEN ELKHATIR

■ **مبرهنة:**

- يكون n عددا زوجيا إذا و فقط إذا كان رقم وحداته c_0 ينتمي إلى $\{0;2;4;6;8\}$

و يكون العدد n مضاعفا ل5 إذا و فقط إذا كان رقم وحداته c_0 ينتمي إلى الثنائية $\{0;5\}$.

- يكون العدد n مضاعفا ل3 (على التوالي ل9) إذا و فقط إذا كان مجموع أرقامه مضاعفا ل3 (على التوالي ل9) .

- يكون العدد n مضاعفا ل4 إذا و فقط إذا كان العدد $\overline{c_1c_0}$ المكون من رقمي وحدات وعشرات n مضاعفا ل4 .

و يكون n مضاعفا ل25 إذا و فقط إذا كان : $\overline{c_1c_0} \in \{00;25;50;75\}$.

■ **تمرين05:**

1)- كون عددا صحيحا طبيعيا من خمسة أرقام مضاعف ل3 و لا يقبل القسمة على 6 .

2)- كون عددا صحيحا طبيعيا من خمسة أرقام مضاعف ل3 و4 و لا يقبل القسمة على 9 .

3)- ما هي قيم رقم العشرات التي يكون من أجلها العدد $a=\overline{63x1}$ مضاعفا ل9 ؟

4)- ما هي قيم رقم العشرات x التي يكون من أجلها العدد $b=\overline{63x1}$ مضاعفا ل3 دون أن يكون مضاعفا ل9 ؟

5)- حدد جميع قيم الرقمين x و y لكي يكون العدد $c=\overline{28x75y}$ مضاعفا ل3 و4 .

المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر

■ **تعريف:**

أصغر مضاعف مشترك موجب قطعا لعددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر ل a و b و يرمز له بالرمز $a \vee b$.

بمعنى أن : $a \vee b = ppe\left(a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^*\right)$.

■ **مثال:**

لدينا : $12\mathbb{N}^* = \{12;24;36;48;60;...\rightarrow\}$ و $15\mathbb{N}^* = \{15;30;45;60;...\rightarrow\}$

إذن : $12 \vee 15 = 60$.

■ **ملحوظة:**

- إذا كان b قاسما ل a فإن : $a \vee b = a$.

■ **تعريف:**

القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين a و b هو أكبر القواسم المشتركة لهما معا و يرمز له بالرمز $a \wedge b$.

بمعنى أن : $a \wedge b = pge\left(Div(a) \cap Div(b)\right)$.

■ **مثال:**

من جهة $45 = 1\times 45 = 3\times 15 = 5\times 9$ إذن : $Div(45) = \{1;3;5;9;15;45\}$

و من جهة أخرى : $60 = 1\times 60 = 2\times 30 = 3\times 20 = 4\times 15 = 5\times 12 = 6\times 10$

إذن : $Div(60) = \{1;2;3;4;5;6;10;12;15;20;30;60\}$

و بالتالي فإن : $45 \wedge 60 = 15$.

■ **خاصية:**

لكل عددين صحيحين طبيعيين a و b لدينا : $(a \vee b).(a \wedge b) = ab$.

و بصفة خاصة ، إذا كان $a \wedge b = 1$ فإن : $a \vee b = ab$.

خوارزمية أقليدس أو طريقة القسمات المتتالية

تمكن خوارزمية أقليدس من تحديد القاسم المشترك الأكبر $a \wedge b$ لعددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين a و b بحيث : $a > b$

ننجز القسمة الأقليدية ل a على b و ليكن r_1 باقي هذه القسمة ، ثم ننجز القسمة الأقليدية ل b على r_1 و ليكن الباقي r_2 ، ثم ننجز قسمة r_1 على r_2 و نعيد هذه العملية إلى أن يكون الباقي منعدما ، و هو $a \wedge b$ آخر باقي غير منعدم .

■ **مثال:**

لنحدد $120 \wedge 45$ باستعمال خوارزمية أقليدس ، الجدول أسفله يلخص القسمات المتتالية :

إذن : $45 \wedge 120 = 15$	**الخارج**	$q_1 = 2$	$q_2 = 1$	$q_3 = 2$
	$a = 120$	$b = 45$	$r_1 = 30$	$r_2 = 15$
	$r_1 = 30$	$r_2 = 15$	$r_3 = 0$	**الباقي**

ثانوية الفتح - الخميسات	المجموعة $\mathbb{N}$ و مبادئ في الحسابيات	الجذع المشترك العلمي
Année scolaire 2007/2008	L'ensemble $\mathbb{N}$ et Notions d'Arithmétique	Prof : A.BEN ELKHATIR

الأعداد الأولية و غربال إراطوستين

1)- الأعداد الأولية:

■ **تعريف:**

نقول إن عددا صحيحا طبيعيا n عدد أولي إذا كان له قاسمين بالضبط هما 1 و n .

بمعنى أن : $Div(n)=\{1;n\}$.

■ **مثال:**

الأعداد العشرة الأولى الأولية هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 و 29 .

و هذه الأعداد كلها فردية ما عدا 2 فهو عدد زوجي .

■ **تمرين06:**

حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ التي يكون من أجلها A_n عددا أوليا في كل حالة من الحالات التالية :

$(1): A_n=n^2+4n+3$ ، $(2): A_n=n^2-8n+15$ و $(3): A_n=n^4+4$.

2)- غربال إراطوستين: (crible d'ératosthène)

■ **خاصية:**

ليكن عددا صحيحا طبيعيا بحيث $a\geq 2$.

إذا كان a لا يقبل القسمة على أي عدد أولي p بحيث : $p^2\leq a$ ، فإن a عدد أولي .

■ **مثال:**

نعتبر العددين $a=487$ و $b=511$.

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من العدد $a=487$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 و 19 .

و487 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد (تحقق من ذلك) إذن 487 عدد أولي .

بالنسبة للعدد $b=511$ ، لدينا : $511=7\times 73$ ، إذن فهذا عدد غير أولي .

■ **غربال إراطوستين:**

غربال إراطوستين جدول يمكن من تحديد جميع الأعداد الأولية الأصغر من عدد صحيح طبيعي معلوم N ، مثلا بالنسبة ل $N=100$ ننشئ جدولا على الشكل 10×10 نكتب فيه جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية من 1 إلى 100 .

نشطب أولا على العدد 1 (لأنه ليس أوليا) ، ثم نشطب بالتتابع على مضاعفات الأعداد 2 ، 3 ، 5 و7 (ما عدا 2 ، 3 ، 5 و7 لأنها أعداد أولية) .

و الأعداد التي لم يشطب عليها لا تقبل القسمة على الأعداد الأولية : 2 ، 3 ، 5 و 7 التي مربعاتها أصغر من 100 ، إذن فهي أعداد أولية .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

التفكيك إلى جداء عوامل أولية:

■ **خاصية:**

كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم و يخالف 1 يمكن تفكيكه بكيفية وحيدة على شكل جداء عوامل أولية .

■ **مثال:**

ننجز تفكيكي العددين $a=450$ و $b=3675$ في الجدول التالي :

إذن :		2	3	3	5	5
$450=2\times 3^2\times 5^2$	$a=450$	225	75	25	5	1
إذن :		3	5	5	7	7
$3675=3\times 5^2\times 7^2$	$b=3675$	1225	245	49	7	1

■ **خاصية:**

- القاسم المشترك الأكبر $a\wedge b$ لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو جداء العوامل المشتركة في تفكيكي a و b مرفوعة إلى أصغر أس .
- و المضاعف المشترك الأصغر $a\vee b$ لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو جداء العوامل المشتركة و غير المشتركة في تفكيكي a و b مرفوعة إلى أكبر أس .

بالنسبة للمثال السابق لدينا : $450\wedge 3675=3\times 5^2=3\times 25=75$

و $450\vee 3675=2\times 3^2\times 5^2\times 7^2=6\times 3675=22050$.