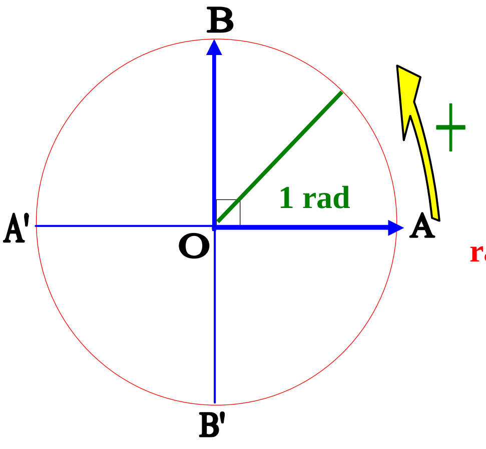
درس : الحساب المثلثي مستوى جذع مشترك علوم	إنجاز الاستاذ : محسن الشرفي ثانوية المختار السوسي المعازيز Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

القدرات المستهدفة

ـ إستعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة لزاوية محددة بأحد نسبها المثلثية و العكس.

ـ التمكن من النسب المثلثية للزوايا الإعتيادية و تطبيق مختلف العلاقات .

I ـ الدائرة المثلثية :



تعريف 1 :

الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها 1 و موجهة توجيها موجبا .

تعريف 2 :

$\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ يسمى معلما متعامدا ممنظما مباشرا مرتبطا بالدائرة المثلثية (C) .

تعريف 3 :

(C) دائرة مثلثية مركزها O .

الرديان هو قياس الزاوية المركزية التي تحصر على (C) قوسا طولها 1 و نرمز له بـ **rad**

نتيجة :

إذا كانت x و y هما قياسا زاوية هندسية بالرديان و بالدرجة على التوالي

فإن $\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{y}{180°}$.

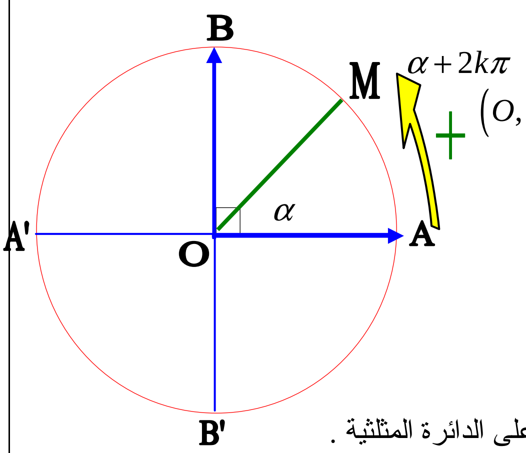
مثال :

لنحول القياس التالي $80°$ من الدرجة إلى الرديان :

لدينا $\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{y}{180°}$ إذن $\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{80°}{180°}$ و منه $x=\dfrac{80°\pi}{180°}=\dfrac{4\pi}{9}$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

II ـ الأفاصيل المنحنية لنقطة :



تعريف :

ـ لتكن M نقطةمن الدائرة المثلثية (C) المرتبطة بالمعلم المتعامد الممنظم المباشر $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$

و α قياس الزاوية الهندسية $A\hat{O}M$ بالرديان .

كل عدد على الشكل $\alpha+2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

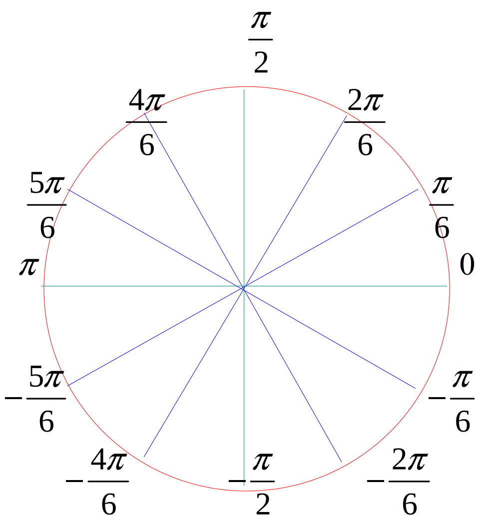
ـ من بين الأفاصيل المنحنية للنقطة M

يوجد أفصول منحني ينتمي إلى المجال $]-\pi,\pi]$

يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M .

مثال :

1 ـ تمثيل الأفاصيل التالية $\dfrac{\pi}{6}$ و $\dfrac{2\pi}{6}$ و $\dfrac{4\pi}{6}$ و $\dfrac{5\pi}{6}$ و $\dfrac{-5\pi}{6}$ و $\dfrac{-4\pi}{6}$ و $\dfrac{-2\pi}{6}$ و $\dfrac{-\pi}{6}$ على الدائرة المثلثية .

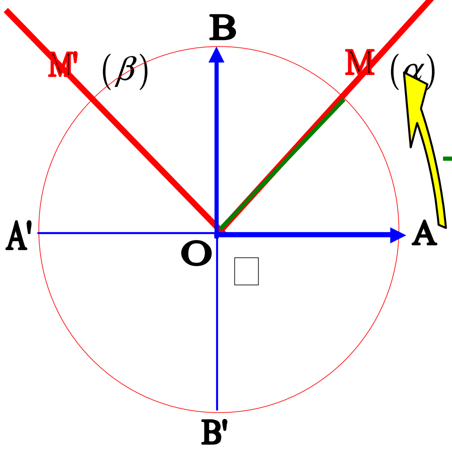


Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

2 ـ تحديد الأفصول الرئيسي للقياس $\frac{40\pi}{6}$.

لدينا : $\frac{40\pi}{6}=\frac{36\pi+4\pi}{6}=6\pi+\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+6\pi$ و بما أن $-\pi<\frac{2\pi}{3}<\pi$

فإن الأفصول الرئيسي هو $\frac{2\pi}{3}$.



III– الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم لهما نفس الأصل :

تعريف 1 :

المستوى (P) موجه توجيها مباشرا و O نقطة من (P) .

ليكن $[O,x)$ و $[O,y)$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل O .

الزوج $([O,x),[O,y))$ المكون من نصفي المستقيم $[O,x)$ و $[O,y)$

يسمى الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز : $(\widehat{Ox,Oy})$

تعريف 2 :

قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{Ox,Oy})$ هي الأعداد $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

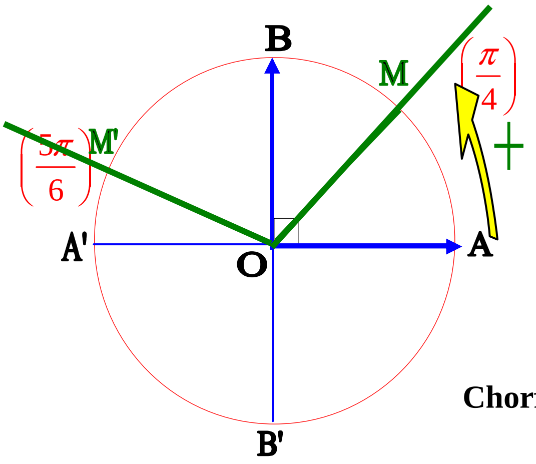
نرمز لقياس الزاوية $(\widehat{Ox,Oy})$ بـ $(\overline{Ox,Oy})$ و نكتب $(\overline{Ox,Oy})=\beta-\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{Ox,Oy})\equiv\beta-\alpha[2\pi]$.

خاصية و تعريف :

من بين قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم يوجد قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القياس الرئيسي للزاوية الموجهة .

مثال :

في الشكل التالي :



$(\overline{OA,OM})\equiv\frac{\pi}{4}-0[2\pi]$ إذن $(\overline{OA,OM})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

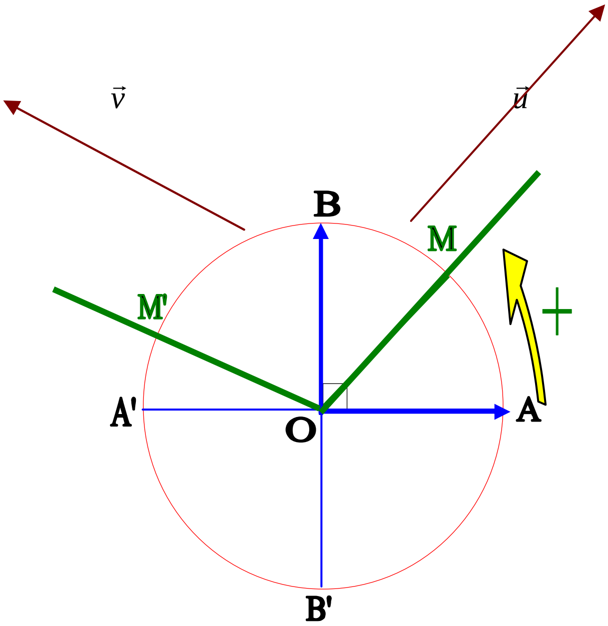
$(\overline{OM,OM'})\equiv\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ إذن $(\overline{OM,OM'})\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

$(\overline{OM,OA'})\equiv\pi-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ إذن $(\overline{OM,OA'})\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

IV– الزاوية الموجهة لمتجهتين غير منعدمتين :

تعريف :



الزاوية الموجهة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الغير المنعدمتين

هي الزاوية الموجهة $(\widehat{[OM),[OM')})$ و نرمز لها : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ هي

قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{[OM),[OM')})$.

القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{[OM),[OM')})$

هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

و نرمز لقياس الزاوية : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ بالرمز $(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.

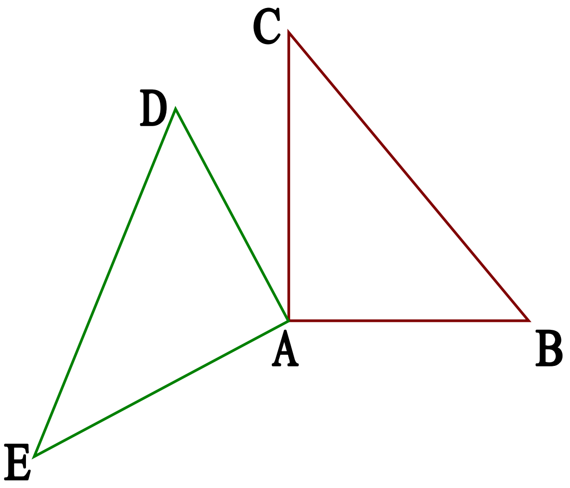
علاقة شال :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات غير منعدمة .

لدينا : $(\overline{\vec{u},\vec{v}})+(\overline{\vec{v},\vec{w}})\equiv(\overline{\vec{u},\vec{w}})[2\pi]$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

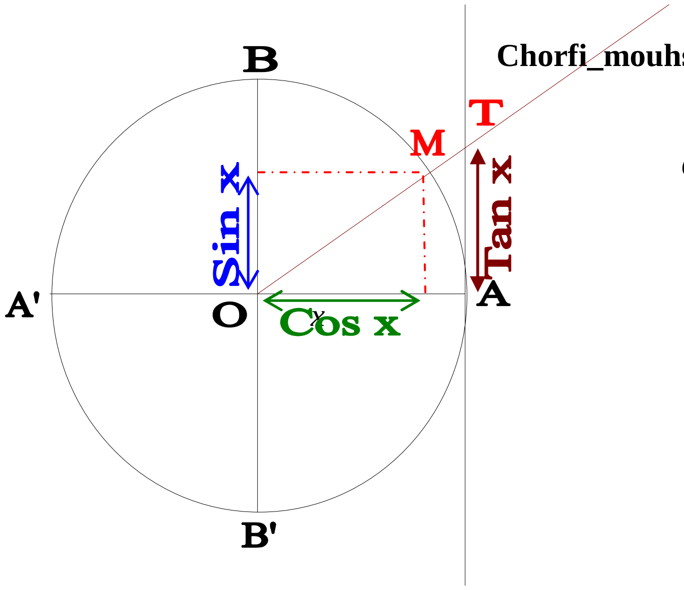
مثال :



المثلثان ABC و ADE مثلثان قائما الزاوية و الزاوية الهندسية $D\hat{A}C$ قياسها $\frac{\pi}{3}$.

لنحسب $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ و $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)$

لدينا :
$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}[2\pi]$$
$$\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$
$$\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$\equiv\frac{-4\pi}{3}[2\pi]$$



Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

V- النسب المثلثية :

تعريف :

أفصول النقطة M يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x و نرمز له بـ $Cosx$

أرتوب النقطة M يسمى جيب العدد الحقيقي x و نرمز له بـ $Sinx$

أفصول النقطة T يسمى ظل العدد الحقيقي x و نرمز له بالرمز $Tanx$.

إشارة النسب المثلثية:

- $Cosx\geq 0$ في القوس $\overset{\frown}{BB'}$ الذي يحتوي على النقطة A .
- $Cosx\leq 0$ في القوس $\overset{\frown}{BB'}$ الذي يحتوي على النقطة A' .
- $Sinx\geq 0$ في القوس $\overset{\frown}{AA'}$ الذي يحتوي على النقطة B .
- $Sinx\leq 0$ في القوس $\overset{\frown}{AA'}$ الذي يحتوي على النقطة B' .
- $Tanx\geq 0$ في القوسين الصغيرين $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{A'B'}$.
- $Tanx\leq 0$ في القوسين الصغيرين $\overset{\frown}{A'B}$ و $\overset{\frown}{AB'}$

1 – خاصيات :

$-1\leq\sin x\leq 1$ و $-1\leq\cos x\leq 1$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ و $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

مثال :

لنحسب $\sin x$ علما أن $\cos x=\frac{2}{3}$ و $x\in\left]-\pi,0\right[$.

لدينا
$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\sin^2 x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1$$
$$\sin^2 x+\frac{4}{9}=1$$
$$\sin^2 x=1-\frac{4}{9}$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

$$\sin^2 x=\frac{5}{9}$$

$\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ أو $\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

وبما ان $x\in\left]-\pi,0\right[$ فإن $\sin x<0$

ومنه $\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

2 ـ خاصيات :

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$ $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)$ $\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\frac{1}{\tan(x)}$	$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$ $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$ $\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1}{\tan(x)}$	$\sin(\pi+x)=-\sin(x)$ $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$ $\tan(\pi+x)=\tan(x)$	$\sin(\pi-x)=\sin(x)$ $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$ $\tan(\pi-x)=-\tan(x)$	$\sin(-x)=-\sin(x)$ $\cos(-x)=\cos(x)$ $\tan(-x)=-\tan(x)$

مثال :

تبسيط $\sin(\pi-x)-\cos(5\pi+x)-\cos(x-3\pi)+\sin(\pi+x)$.

$$\begin{aligned}
&\sin(\pi-x)-\cos(5\pi+x)-\cos(x-3\pi)+\sin(\pi+x)\\
&=\sin(x)-\cos(4\pi+\pi+x)-\cos(x-\pi-2\pi)-\sin(x)\\
&=\sin(x)-\cos(\pi+x)-\cos(x-\pi)-\sin(x)\\
&=\sin(x)+\cos(x)-\cos(\pi-x)-\sin(x)\\
&=\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)-\sin(x)=0
\end{aligned}$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr