

## التذبذبات الحرة في دائرة RLC متوالية

**التوجيهات :** التذبذبات الحرة في دائرة RLC متوالية : (8 س)

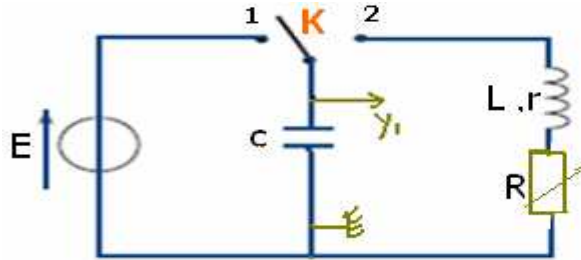
- تفريغ مكثف في وشيعة - تأثير الخمود - شبه الدور .
- التفسير الطاقى : انتقال الطاقة بين المكثف والوشيعة - مفعول جول .
- الدراسة التحليلية في حالة الخمود المهمل (مقاومة مهملة) ، الدور الخاص
- صيانة التذبذبات : الدراسة التجريبية ، الدراسة النظرية .

### (I) التذبذبات الحرة في دائرة RLC على التوالي:

#### (1) تعريف:

الدائرة RLC على التوالي هي دائرة تتكون من موصل أومي مقاومته R ومكثف سعته C ووشيعة مقاومتها r ومعامل تحريضها L. تكون التذبذبات حرة في دائرة RLC عندما لا يتوفر فيها أي مصدر للطاقة ماعدا الطاقة المخزونة في المكثف المشحون بدنيا : حيث يتفرغ المكثف في الوشيعة. (أي أن الدائرة لا تشتمل على أي مولد للتيار الكهربائي).

#### (2) تفريغ مكثف في وشيعة:



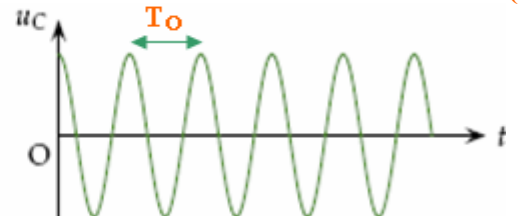
نجز التركيب التالي :

نضع قاطع التيار في الموضع 1 لمدة زمنية كافية لشحن المكثف ثم نورجه إلى الموضع 2 ، ونعاين على شاشة راسم التذبذب التوتر بين مربطي المكثف. نعيد التجربة عدة مرات برفع قيمة المقاوم R فنحصل على أنظمة الخمود.

#### (3) أنظمة الخمود:

عند وضع قاطع التيار في الموضع 2 ، شحنة المكثف تتذبذب بين لبوسيه ، ونظرا لوجود المقاومة في الدائرة ، تتناقص الشحنة وبالتالي يتناقص التوتر المطبق بين مربطي المكثف ، نقول أن التذبذبات مخمدة . وبما أن الدائرة لا تشتمل على أي مولد ، فإن التذبذبات حرة ومخمدة. (خلال التذبذب جزء من الطاقة يتبدد على مستوى الموصل الأومي على شكل طاقة حرارية بمفعول جول). وحسب قيمة مقاومة الدائرة نميز ثلاث أنظمة:

**\*نظام دوري:** عندما تكون المقاومة الكلية للدائرة منعدمة، تكون التذبذبات حرة وغير مخمدة. (في هذه الحالة تحفظ الطاقة الكلية للدائرة).

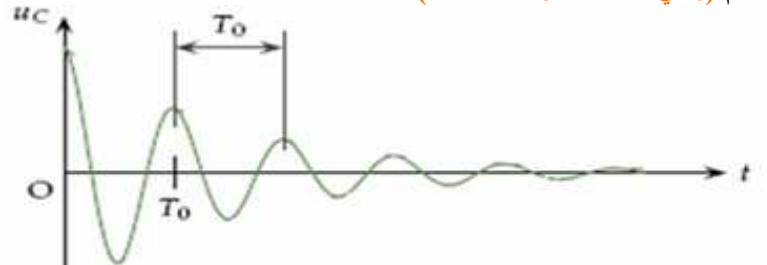


وهذه حالة يصعب تحقيقها تجريبيا ،

لأنه كلما كانت الوشيعة فإن مقاومتها غير مهملة

تتميز بالدور الخاص :  $T_0$

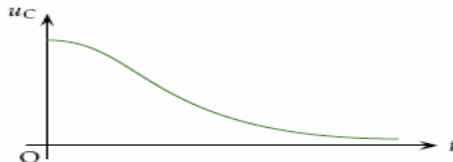
**\*نظام شبه دوري:** عندما تكون المقاومة الكلية للدائرة صغيرة، التذبذبات حرة ومخمدة، ففي هذه الحالة يتناقص وسعها إلى أن ينعدم. (وهي حالة الخمود الضعيف).



وشبه الدور : T

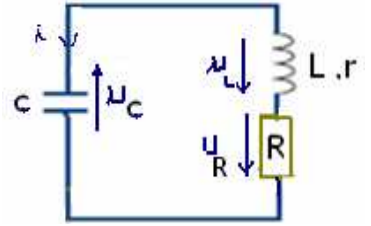
$$T \approx T_0$$

**\*نظام لا دوري:** المقاومة كبيرة ، في هذه الحالة تختفي التذبذبات لأن الخمود قوي. يفقد المكثف شحنته لكن بعد مدة زمنية طويلة دون تذبذب.



#### 4) المعادلة التفاضلية لدارة RLC.

تعتبر التركيب التالي:



حسب قانون إضافية التوترات:  $u_C + u_R + u_L = 0$

$$u_R = Rc \frac{du_c}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{dq}{dt} = c \frac{du_c}{dt} \quad \text{مع} \quad u_R = Ri$$

$$u_L = ri + L \frac{di}{dt}$$

$$Lc \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R_1 c \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_c + (R+r)c \frac{du_c}{dt} + Lc \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 0 \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R_1}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

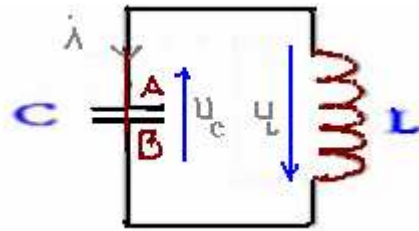
ونحصل على المعادلة التفاضلية لدارة متوالية RLC :

المقدار:  $\frac{R_1}{L} \frac{du_c}{dt}$  ناتج عن ظاهرة الخمود (بانعدامه يزول الخمود).

#### II) التذبذبات غير المخمدة في دارة مثالية LC.

##### 1) دراسة الدارة المثالية LC

**(أ) التركيب :** تعتبر التركيب التالي المكون من مكثف سعته  $C$ ، وشيعة معامل تحريضها الذاتي  $L$  ومقاومتها منعدمة. هذه دارة مثالية لأنه كيفما كانت الوشيعة فإن مقاومتها غير مهمة وبالتالي فهذا تركيب مثالي يصعب تحقيقه تجريبيا.



##### ب) المعادلة التفاضلية:

حسب قانون إضافية التوترات نجد:  $(1) u_L + u_c = 0$

$$u_L = Lc \frac{d^2 u}{dt^2}$$

$$\text{إذن:} \quad u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{مع:} \quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(cu_c)}{dt} = c \frac{du_c}{dt}$$

وبذلك العلاقة (1) تصبح:  $(2) Lc \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0$  وهي المعادلة التفاضلية التي يتحققها التوتر بين مرطبي المكثف.

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{Lc} u_c = 0 \quad \text{ويمكن كتابتها كما يلي:}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{Lc} q = 0 \quad \text{أي:} \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0 \quad \text{ملحوظة: بتعويض } u_c \text{ ب: } \frac{q}{c} \text{ العلاقة (1) } u_L + u_c = 0 \text{ تصبح:}$$

وهي المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة الكهربائية  $q$ .

##### ج) حل المعادلة التفاضلية:

حل المعادلة التفاضلية:  $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{Lc} u_c = 0$  هو عبارة عن دالة جيبيه يكتب كما يلي:

$$\text{مع:} \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \quad \text{النبض الخاص.}$$

$$u_c(t) = U_m \cos(\omega_o t + \varphi)$$

$\omega_o$  النبض الخاص للدارة المتذبذبة LC، وحدته rad/s.

$U_m$ : وسع التذبذبات وهي القيمة القصوى للتوتر  $u_c(t)$ .

$\frac{2\pi}{T}t + \varphi$ : طور التوتر عند اللحظة ذات التاريخ  $t$ .

$\varphi$ : الطور عند أصل التواريخ. (بالراديان rad).

$T_0$ : الدور الخاص للتذبذبات.

الثابتين  $U_m$  و  $\varphi$  تحددان باستعمال الشروط البدئية للتوتر  $u_c$  وشدة التيار الكهربائي  $i$ .

## (2) تحديد تعبير الدور الخاص:

$$u_c(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

لدينا:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -U_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow \frac{du_c}{dt} = -U_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

بمعناها فنجد:  $\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot u_c(t)$  ثم نعوض في المعادلة التفاضلية

$$-\omega_0^2 u_c + \frac{1}{LC} u_c = 0 \quad \text{ومنه: } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{النبض الخاص}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{لدينا:} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{إذن:}$$

لنستعمل معادلة الأبعاد لكي نتأكد من كون وحدة الدور في العلاقة السابقة هي الثانية.

$$[L][c] = \frac{[u][t]}{[i]} \times \frac{[i][t]}{[u]} = [t]^2 \Leftrightarrow \begin{cases} [c] = [i][u]^{-1}[t] \Leftrightarrow c = \frac{i}{\frac{du_c}{dt}} \Leftrightarrow i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(cu_c)}{dt} = c \frac{du_c}{dt} \\ [L] = [u][i]^{-1}[t] \Leftrightarrow L = \frac{u_L}{\frac{di}{dt}} \Leftrightarrow u_L = L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

إذن وحدة  $T_0$  هي: وحدة الزمن، أي الثانية.

أو بطريقة أخرى: من خلال تعريف ثابتة الزمن.

$$[LC] = \left[\frac{L}{R}\right] \times [RC] = [T]^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{L}{C}\right] = [T] \quad \text{و} \quad [RC] = [T] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L}{R}$$

## (3) تعبير الشحنة $q$ وشدة التيار $i(t)$ .

\* شحنة المكثف:  $q(t) = c \times u(t) = c U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  مع:  $q_m = c U_m$

\* شدة التيار الكهربائي:  $i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$  مع:  $I_m = q_m \omega_0$

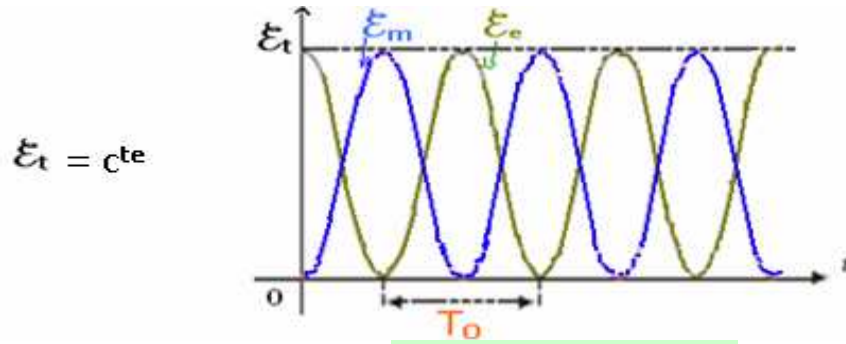
## (III) انتقال الطاقة بين المكثف والوشيعة:

### (1) طاقة الدارة المثالية $LC$ .

الطاقة الكلية المخزونة في الدارة المثالية  $LC$  تساوي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف  $\xi_e$  والطاقة المغناطيسية  $\xi_m$  المخزونة في الوشيعة.

$$\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2} c u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

يمثل الشكل التالي تغيرات  $\xi_m$  و  $\xi_e$  و  $\xi_t$  بدلالة الزمن.

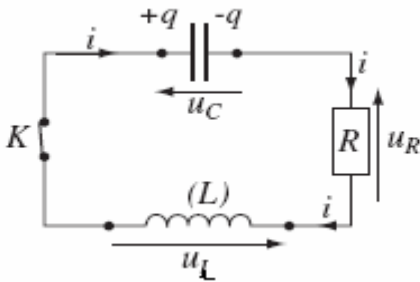


الطاقة الكلية لدارة مثالية LC :  $\xi_t = \frac{1}{2} c U_m^2 = \frac{1}{2} L i_m^2$

استنتاج: خلال التذبذبات غير المخمدة تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغناطيسية في الوشعة والعكس.

## (2) طاقة الدارة المتوالية RLC

يمكن التعبير عن طاقة الدارة المتوالية RLC في لحظة معينة كما يلي :  $\xi_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c} + \frac{1}{2} L i^2$



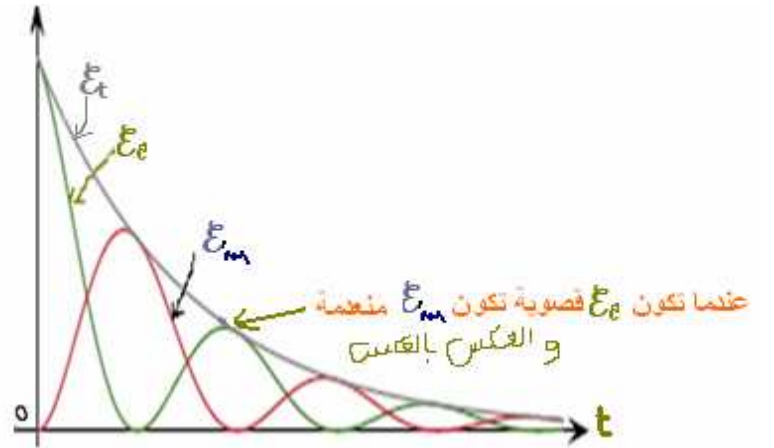
لدينا حسب قانون إضافية التوترات :  $u_L + u_R + u_C = 0$

أي :  $L \frac{di}{dt} + R i + \frac{q}{c} = 0$  (1)

من خلال تعبير الطاقة الكلية للدارة :  $\xi_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c} + \frac{1}{2} L i^2$

إن :  $\frac{d\xi_t}{dt} = \frac{q}{c} \cdot \frac{dq}{dt} + L i \frac{di}{dt} = i \cdot \left[ \frac{q}{c} + L \frac{di}{dt} \right]$

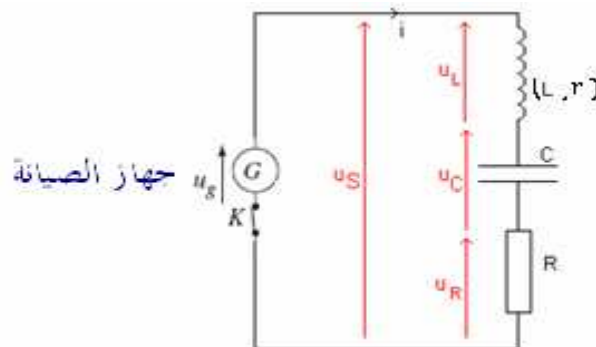
باعتبار العلاقة (1)  $\frac{d\xi_t}{dt} = -R i^2$  إذن الطاقة تناقصية ويعزى ذلك إلى وجود المقاومة.



تتناقص الطاقة الكلية للدارة تدريجيا بسبب مفعول جول.

## IV صيانة التذبذبات:

يمكن صيانة التذبذبات في دارة متوالية RLC، ويتم ذلك باستعمال مولد G يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة بمفعول جول على مستوى المقاومة الكلية للدارة.



المولد  $G$  يزود الدارة بتوتر يتناسب اطرادا مع شدة التيار الكهربائي الذي يعبر الدارة.  $u_g = R_o.i$  (مع  $R_o = R + r$ ) وهو يتصرف كمقاومة سالبة.

بتطبيق قانون إضافية التوترات :  $u_g = u_R + u_c + u_L$

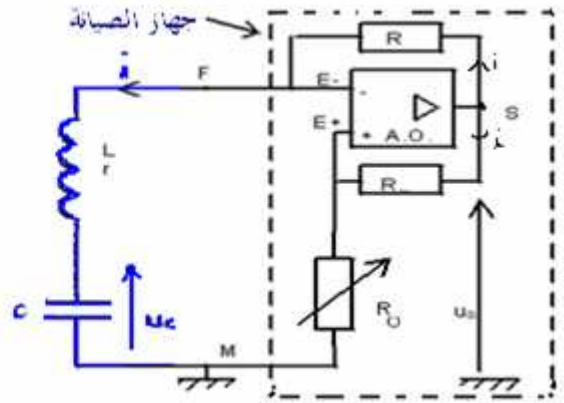
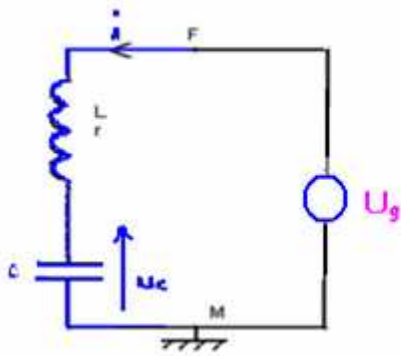
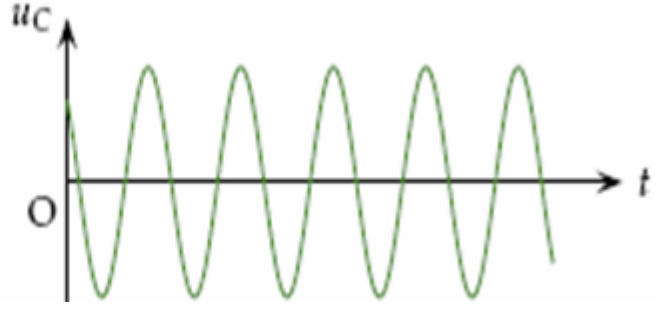
$$(1) \quad L \frac{di}{dt} + u_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (R+r)i = R.i + u_c + r.i + L \frac{di}{dt} \quad \text{أي:}$$

$$\frac{di}{dt} = c \frac{d^2 u_c}{dt^2} \quad \text{فإن:} \quad i = \frac{dq}{dt} = c \frac{du_c}{dt}$$

إذن (1) تصبح:  $Lc \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$  وهي المعادلة التفاضلية المميزة للدارة المثالية ذات المقاومة المهمله ، وبذلك تصبح التذبذبات مصانة.

دورها :  $T = T_o$

$$T_o = 2\pi\sqrt{LC}$$



SBIRO Abdelkrim Lycée Agricole Oulad Taima email : sbiabdou@yahoo.fr  
Pour toutes observation contactez mon email