حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

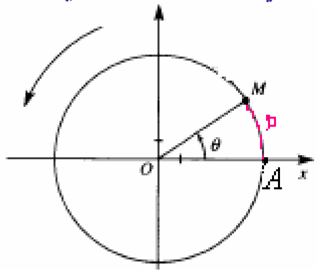
I الأفصول الزاوي –السرعة الزاوية-التسارع الزاوي:

1) تذكير:

يكون جسم صلب، غير قابل للتشويه، في حركة دوران حول محور ثابت Δ إذا كانت جميع نقطه لهاحركة دائرية ممركزة على هذا المحور (باستثناء النقط المنتمية للمحور Δ).

2) معلمة موضع المتحرك:

تتم معلمة موضع المتحرك ، في حالة حركة الدوران، باستعمال الأفصول المنحني أو الأفصول الزاوي .



الأفصول المنحني: $s = \widehat{AM}$

الأفصول الزاوي: $\theta = (\overline{0x}, \overline{0M})$

العلاقة بين الأفصول المنحني والأفصول الزاوي : $s = R.\theta$

3) السرعة الزاوية:

السرعة الزاوية هي مشتقة الأفصول الزاوي بالنسبة للزمن : $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ ووحدتها في النظام العالمي للوحدات : rad/s .

السرعة الخطية هي مشتقة الأفصول المنحني بالنسبة للزمن : $v = \dfrac{ds}{dt}$ ووحدتها في النظام العالمي للوحدات : m/s

بما أن: $s = R.\theta$ فإن : $\dot{s} = R.\dot{\theta}$ وهي العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية. (مع $\dot{s} = v$)

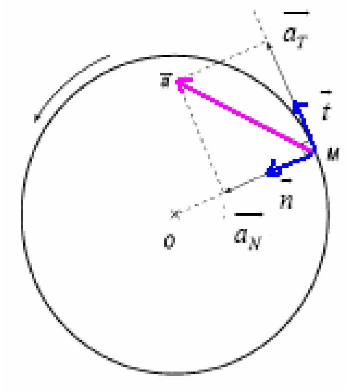
ملحوظة: مبيانيا : السرعة الزاوية اللحظية: $\dot{\theta}_i = \dfrac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$

4) التسارع الزاوي: أ) تعريف:

التسارع الزاوي هو مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن. $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt}$ ب: ra/s^2.

ملحوظة: مبيانيا : التسارع الزاوي اللحظي: $\ddot{\theta}_i = \dfrac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\tau}$

ب) التسارع المماسي والتسارع ألمنظمي:



$\vec{u}$

في معلم فريني، متجهة التسارع: $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

أي: لها مركبتين : - مركبة مماسية $a_T = \dfrac{dv}{dt}$ - ومركبة منظمية: $a_N = \dfrac{v^2}{r}$

بما أن: $s = r\theta$ فأن: $v = r\dot{\theta} \Leftarrow \dfrac{dv}{dt} = r.\ddot{\theta}$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta}$$

$$a_N = r\dot{\theta}^2$$

II العلاقة الأساسية للتحريك في حالة الدوران حول محور ثابت:

1) نص العلاقة:

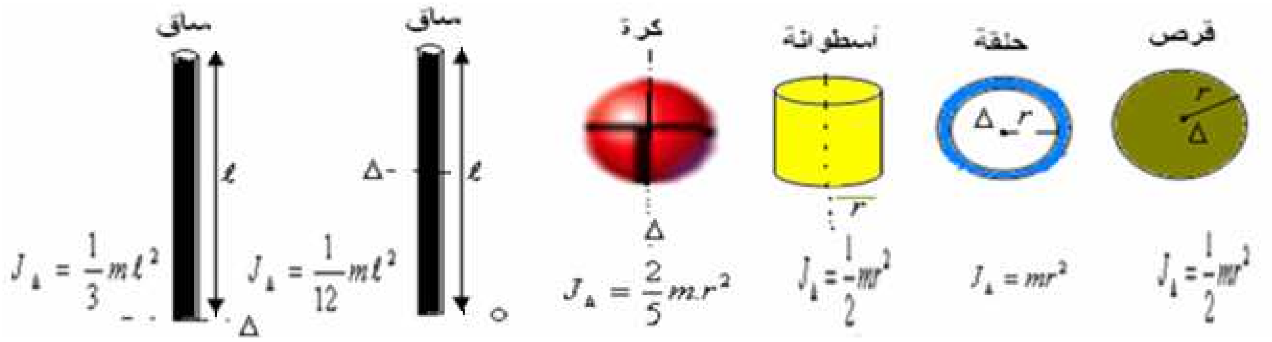
في معلم مرتبط بالأرض ، وبالنسبة لمحور ثابت (Δ) ، مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت ، يساوي ، في كل لحظة ، جذاء عزم القصور J_Δ والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للجسم.

$$\Sigma M_\Delta \vec{F} = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

J_Δ : عزم قصور الجسم ب: $Kg.m^2$

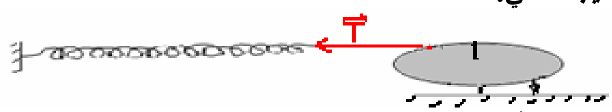
$\ddot{\theta}$: التسارع الزاوي ب: rad/s^2

2) تعابير عزم القصور لبعض الأجسام ذات أشكال هندسية بسيطة:

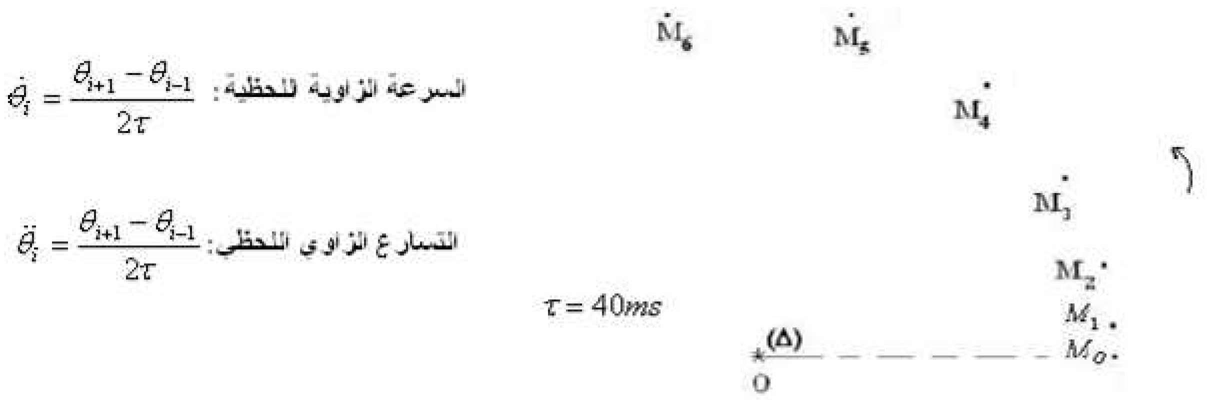


3) التحقق التجريبي من العلاقة: $\Sigma M_\Delta \vec{F} = J_\Delta.\ddot{\theta}$

نستعمل المنضدة الهوائية وننجز التركيب التالي:



ندير القرص حول محور دورانه Δ ثم نحرره فنحصل على التسجيل التالي:



مثال:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2\tau} = \frac{15° - 0°}{2\times 20\times 10^{-3}s} = \frac{\frac{15\times\pi}{180}rad}{0{,}04} = 6{,}54 rad/s$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\theta_3 - \theta_1}{2\tau} = \frac{30° - 5°}{2\times 20\times 10^{-3}s} = \frac{\frac{25\times\pi}{180}rad}{0{,}04} = 10{,}9 rad/s$$

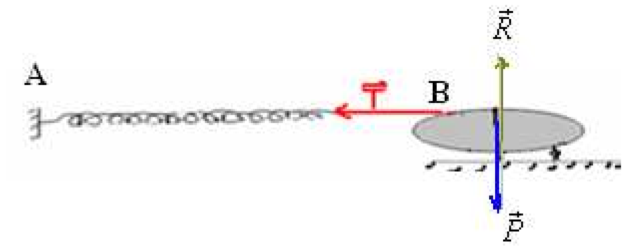
نتخذ المحور ox المار من M_O محورا مرجعا للأفاصيل الزاوية ولحظة تسجيل M_O أصلا للتواريخ.

القرص خلال حركته يخضع إلى تأثير القوى التالية: وزنه $\vec{P}$ ، تأثير الخيط $\vec{T}$ تأثير سطح التماس $\vec{R}$.

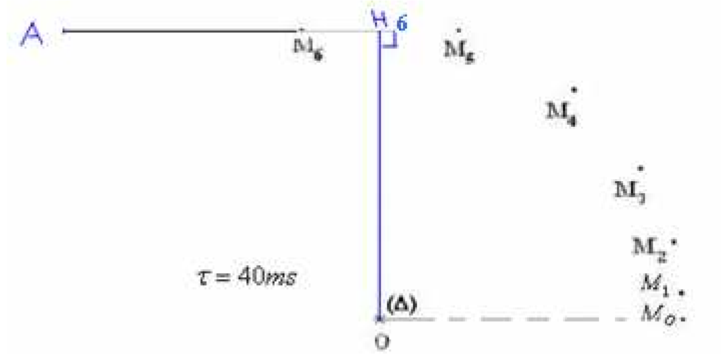
لنعين مجموع عزوم القوى : $\Sigma M_{\vec{F}_\Delta} = M_{\vec{P}_\Delta} + M_{\vec{R}_\Delta} + M_{\vec{T}_\Delta} = M_{\vec{T}_\Delta}$ لأن $\vec{P}$ و $\vec{R}$ تتقاطعان مع محور الدوران $\Leftarrow$ عزم كل منهما منعدم.

وبذلك يمكن تحديد مجموع العزوم في كل لحظة t_i: $\Sigma M_\Delta \vec{F} == T_i.d_i$

بمعرفة صلابة النابض وطوله الأصلي، نحصل على توتره في كل لحظة: $\Leftarrow T_i = K(\ell_i - \ell_o)$ مع: $\ell_i = AB$.



$d_i = AH_i$: هي المسافة الفاصلة بين خط تأثير القوة T_i ومحور الدوران Δ.



ندرج النتائج في الجدول التالي :

الموضع M_i	M_O	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
التاريخ t_i							
$\theta_i (rad)$							
$\dot\theta_i (rad/s)$							
$\ddot\theta_i$							
$\sum M\vec F$							
$\dfrac{\sum M\vec F}{\ddot\theta}$							

يتضح من خلال نتائج التجربة ما يلي : $\dfrac{\sum M\vec F}{\ddot\theta} = C^{te}$.

بمعرفة كتلة القرص وشعاعه ، نحصل على قيمة عزم قصوره : $J_\Delta = \dfrac{1}{2} mr^2$ ونستنتج تجريبيا أن: $\dfrac{\sum M\vec F}{\ddot\theta} = J_\Delta$

وبالتالي : $\Sigma M_\Delta \vec F = J_\Delta.\ddot\theta$ العلاقة متحققة.

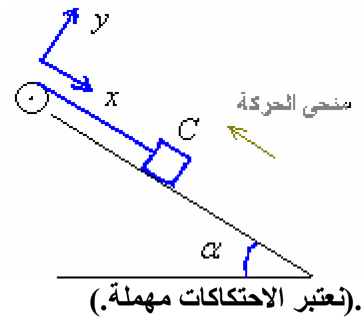
III تطبيقات:

1) تطبيق رقم 1:

نعتبر مجموعة ميكانيكية مكونة من : * بكرة متجانسة D شعاعها r وكتلتها m_o ، قابلة للدوران حول محورها الأفقي والثابت.

*جسم صلب C كتلته m موضوع فوق مستوى مائل بزاوية α.

* خيط f غير قابل للمد ملفوف حول مجرى البكرة وطرفه الآخر مثبت بالجسم C.(انظر الشكل)



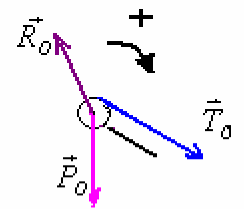
نحرر المجموعة فينزلق الجسم C نحو الأسفل .(نعتبر الاحتكاكات مهملة.)

عبر عن تسارع المجموعة بدلالة g ، α ، m و m_o.

****

* المجموعة المدروسة {البكرة}
* جرد القوى : تخضع البكرة للقوى التالية :

- $\vec{P_O}$: وزنها .
- $\vec{R_O}$ تأثير محور الدوران.
- $\vec{T_O}$: القوة المطبقة من طرف الخيط.



* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة: $\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$

أي: $M_\Delta(\vec{P_O}) + M_\Delta(\vec{R_O}) + M_\Delta(\vec{T_O}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$ (1)

بماأن خطي تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع محور الدوران Δ ، فإن عزم كل منهما منعدم .

أي : $M_\Delta(\vec{R_O}) = 0$ و $M_\Delta(\vec{P_O}) = 0$.

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة $\vec{T_O}$ بالنسبة لمحور الدوران Δ هو : $M_\Delta(\vec{T_O}) = +T_O.r$

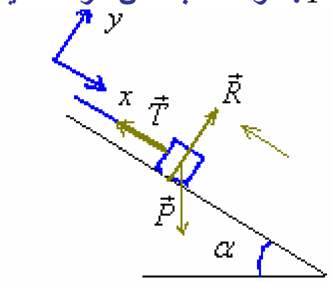
وبالتالي العلاقة (1) تصبح : $T_O.r = J_\Delta.\ddot{\theta}$ أي: $T_O = \dfrac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{r}$ (2)

*المجموعة المدروسة {الجسم C }.

*جرد القوى : الجسم C يخضع للقوى التالية : * $\vec{P}$ وزنه .

* $\vec{R}$: تأثير المستوى المائل.

* $\vec{T}$: القوة المطبقة من طرف الخيط.



*بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم C أثناء حركته في معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ معلم ومتعامد (انظر الشكل)

$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$ أي: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$ (3)

إسقاط العلاقة (3) على المحور oy : $P\cos\alpha + R = 0$ $\Leftarrow$ $R = m.g.\cos\alpha$

إسقاط العلاقة (3) على المحور ox : $P\sin\alpha + 0 - T = m.a_x$ $\Leftarrow$ $T = m.g.\sin\alpha - m.a$ (4)

($a = a_x$ لأن a_y منعدمة ، لا حركة للجسم حسب oy).

بما أن الخيط غير قابل للمد فهو يحتفظ بنفس التوتر في جميع نقطه، وبالتالي : $T = T_O$

ومن خلال العلاقتين (2)و (4) لدينا : $m.g.\sin\alpha - m.a = \dfrac{J_\Delta.\ddot{\theta}}{r}$

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة : $s = r\theta$ بالاشتقاق $\Leftarrow$ $v = r\dot{\theta}$ بالاشتقاق $\Leftarrow$ $a = r\ddot{\theta}$.

العلاقة السابقة تصبح: $m.g.\sin\alpha - m.a = \dfrac{J_\Delta.a}{r^2}$ $\Leftarrow$ $m.g.\sin\alpha = a(m + \dfrac{J_\Delta}{r^2})$ وبالتالي:

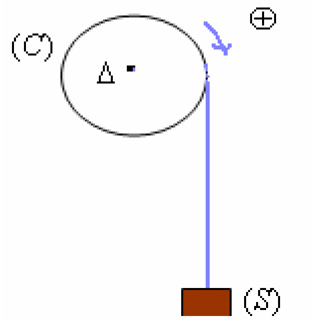
$a = \dfrac{g.\sin\alpha}{1 + \dfrac{J_\Delta}{m.r^2}}$ مع : $J_\Delta = \dfrac{1}{2}m_o r^2$ $\Leftarrow$ $a = \dfrac{g.\sin\alpha}{1 + \dfrac{m_o}{2.m}}$ إذن الحركة متغيرة بانتظام.

2) تطبيق رقم 2:

نعتبر اسطوانة C متجانسة ذات كتلتها $m_C = 2Kg$ ، شعاعها $r = 10cm$ قابلة للدوران حول محور ثابت أفقي Δ يمر من مركزها.

نعلق في طرف خيط غير قابل للمد وملفوف حول الأسطوانة جسما صلبا S كتلته $m_s = 1Kg$. نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية .

القيمة المطلقة لعزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك والمطبقة على محور الأسطوانة : $M_C = 0,38N.m$.

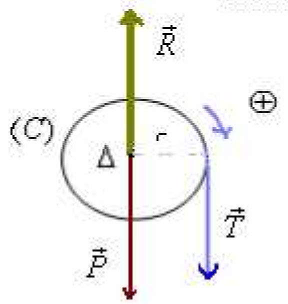


أ) اوجد تعبير التسارع الزاوي للاسطوانة بدلالة : M_C ، r ، J_Δ عزم قصور الأسطوانة و T_C شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على C.

ب) حدد طبعة حركة الجسم S .

ت) احسب قيمة تسارع الجسم S ثم استنتج الزاوي للاسطوانة $\ddot{\theta}$.

نعطي : $g = 9,8 m/s^2$



أ)* المجموعة المدروسة {الأسطوانة C }.

*جرد القوى : الاسطوانة جسم C تخضع للقوى التالية :

* $\vec{P}$ وزنها .

* $\vec{R}$: تأثير محور الدوران.

* $\vec{T}$: القوة المطبقة من طرف الخيط.

*المزدوجة لمقاومة ذات العزم M_C.

* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة: $\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$

أي: **(a)** $M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$

بماأن خطي تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع محور الدوران Δ ، فإن عزم كل منهما منعدم .

أي : $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ و $M_\Delta(\vec{P}) = 0$.

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة $\vec{T}$ بالنسبة لمحور الدوران Δ هو : $M_\Delta(\vec{T}) = +T.r$

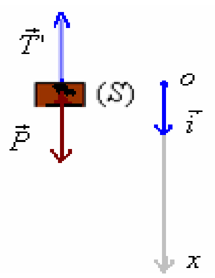
وبذلك تصبح العلاقة **(a)**: $0 + 0 + T.r - M_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$

ومنه :
$$\ddot{\theta} = \frac{T.r - M_c}{J_\Delta}$$

المجموعة المدروسة {الجسم س S }.

جرد القوى : الجسم S يخضع للقوى التالية : * $\vec{P}_s$ وزنه .

* $\vec{T}'$: القوة المطبقة من طرف الخيط.



*تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الأسطوانة : $\Sigma\vec{F} = m_s.\vec{a}_G$ أي: $\vec{P}_s + \vec{T}' = m_s\vec{a}_G$ (b)

* إسقاط العلاقة (b) على المحور $(o,\vec{i})$: $+P_s - T' = m_S.a$ (c)

وبما أن الخيط غير قابل للمد فإن : $T' = T = \dfrac{J_\Delta.\ddot{\theta} + M_C}{r}$ بالتعويض في العلاقة (c)

$$(d)\ m_s.g-\frac{J_\Delta.\ddot{\theta}+M_C}{r}=m_S.a$$:نحصل على

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة فإن: $a=r\ddot{\theta}$ ونعلم أن $J_\Delta=\frac{1}{2}m_c.r^2$ نعوض في العلاقة (d)

$$m_s.g-\frac{\frac{1}{2}m_c.r^2.\frac{a}{r}+M_C}{r}=m_S.a \Rightarrow a=\frac{m_s.g.-\frac{M_c}{r}}{m_s+\frac{m_c}{2}}=\frac{1\times 9{,}8-\frac{0{,}38}{0{,}1}}{1+\frac{2}{2}}=3m/s^2$$

بما أن: $a=r\ddot{\theta}$ فإن: $\ddot{\theta}=\frac{a}{r}=\frac{3}{0{,}1}=30rad/s^2$

SBIRO abdelkrim Lycée Agricole Oulad – Taima Agadir Maroc