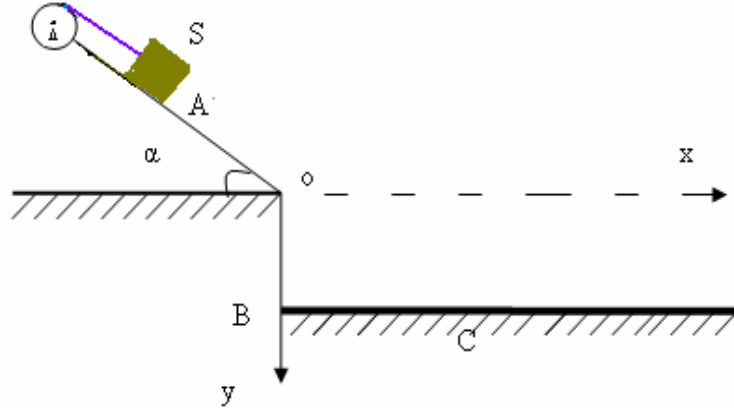


( I )

نعتبر جسما (S) صلبا كتلته  $m = 0,25kg$  ، يمكنه أن ينزلق بدون احتكاك فوق مستوى مائل بزاوية  $\alpha = 30^\circ$  بالنسبة للخط الأفقي .

الجسم (S) مثبت في طرف حبل ذي كتلة مهملة وغير قابل للتمدد و يدور بدون انزلاق على مجرى بكرة شعاعها  $r = 5cm$  قابلة للدوران حول محور أفقي وثابت  $\Delta$  .  
 نعطي عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور  $\Delta$  :  $J_{\Delta} = 2,5.10^{-3} kg.m^2$  و شدة الثقالة:  $g = 10m/s^2$  .



1 نطلق الجسم (S) من النقطة A بدون سرعة بدئية فينزل فوق المستوى المائل مسببا دوران البكرة .  
 1-1 احسب تسارع الجسم (S) واستنتج طبيعته حركته .

2-1 احسب سرعة الجسم (S) في النقطة O علما أن :  $OA = 2m$  .

2 في النقطة O ينفلت الحبل من البكرة فيسقط الجسم (S) في النقطة C من علو  $OB = 75cm$  .

1-2 أعط المعادلتين الزميتين لحركة الجسم (S) في المعلم  $(o, x, y)$  .

2-2 استنتج : ( ا ) مدة السقوط الحر للجسم (S) .

( ب ) المسافة BC .

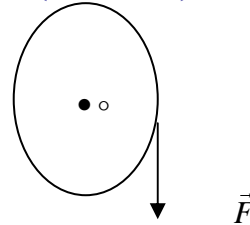
3 عندما ينفلت الحبل من البكرة تخضع هذه الأخيرة إلى مزدوجة مقاومة عزمها ثابت  $M_{\Delta} = -7,5 \times 10^{-2} N.m$  ليتوقف بعد انجاز عدة دورات .

1-3 احسب التسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  للبكرة .

2-3 ما عدد الدورات التي أنجزتها البكرة خلال مدة الكبح ؟

( II )

يمكن لقرص متجانس كتلته  $m$  وشعاعه  $r = 5cm$  ، أن يدور حول محوره الأفقي  $\Delta$  بدون احتكاك . نلف على محيط القرص خيطا رقيقا . (انظر الشكل)



عزم قصور القرص بالنسبة لمحور الدوران :  $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m.r^2$  .

1 نطبق على القرص قوة  $\vec{F}$  مماسة لمحيطه وثابتة ، شدتها تساوي نصف شدة الوزن P للقرص مسببة دوران القرص حول محوره  $\Delta$  . علما أنه في اللحظة  $t = 0$  ،  $\theta = 0$  و السرعة البدئية منعدمة .

1-1 أوجد تعبير التسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  للبكرة بدلالة  $g$  و  $r$  ثم احسب قيمته .

2-1 ما المدة الزمنية التي ينجز فيها القرص دورة كاملة ؟

3-1 ما السرعة الزاوية بعد هذه المدة ؟

2 عندما تصير سرعة القرص 10 دورات في الثانية، نحذف تأثير الخيط . نلاحظ أنه نتيجة التأثيرات العديدة التي تسبب كبح القرص ، فإن سرعته تتناقص لتتعدم بعد 5 دقائق .

1-2: احسب عدد الدورات التي ينجزها القرص قبل توقفه النهائي (باعتبار لحظة الانفصال عن القرص هي اللحظة  $t=0$ ).

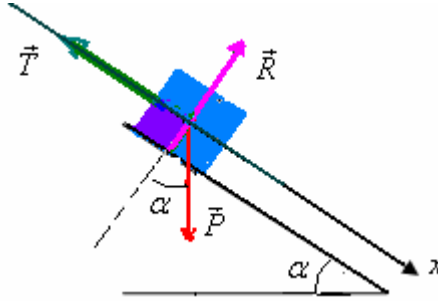
2-2: عبر بدلالة  $m$  و  $r$  عن العزم  $M$  لمزدوجة الكبح الذي نعتبره ثابتا . نعطي :  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Sbiro abdelkrim mail : [sbiabdou@yahoo.fr](mailto:sbiabdou@yahoo.fr)

### تصحيح

I - 1: خلال حركته على المستوى المائل يخضع الجسم  $S$  للقوى التالية:

$\vec{P}$ : وزنه. و  $\vec{R}$ : القوة المقرونة بتأثير سطح التماس وهي  $\perp$  عليه لأن الاحتكاك مهمل.



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم  $S$  نحصل على:  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$

بما أن حركة الجسم  $S$  مستقيمة فإن:  $\vec{a}_G = a \cdot \vec{i}$  المتجهة الواحدة التي توجه المحور  $0x$ . نسقط هذه العلاقة على المحور  $0x$ .

$$+ P \sin \alpha + 0 - T = m \cdot a$$

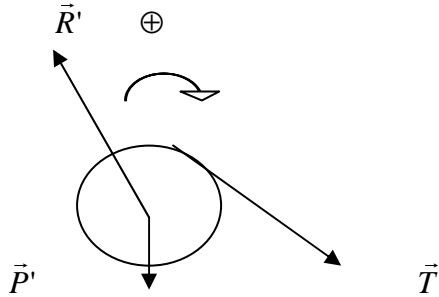
$$T = mg \sin \alpha - ma$$

(1)

وبتطبيق العلاقة الأساسية للحريك على البكرة التي أثناء دورانها تخضع للقوى التالية:

$\vec{P}'$ : وزن البكرة. و  $R'$ : القوة المقرونة بتأثير محور الدوران على البكرة. ثم  $\vec{T}'$ : توتر الخيط.

تكتب العلاقة المعبرة عن القانون الثاني لنيوتن كما يلي:  $M\vec{P}'_{\Delta} + MR'_{\Delta} + M\vec{T}'_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$  وباعتبار المنحى الموجب للدوران:



تصبح العلاقة السابقة كما يلي:  $0 + 0 + T' \cdot r = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$

لأن:  $\vec{R}'$  و  $\vec{P}'$  تتقاطعان مع محور الدوران ومنه:  $T' = \frac{J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}}{r}$  (2)

ولدينا من جهة  $T = T'$  لأن الخيط المستعمل غير قابل للتمدد وذي كتلة مهملة ومن جهة أخرى  $a = r \ddot{\theta}$  لأن الخيط

يدور بدون انزلاق على البكرة. إذن:  $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$  إذن:  $mg \cdot \sin \alpha - ma = \frac{J_{\Delta} \cdot a}{r^2}$  أي:

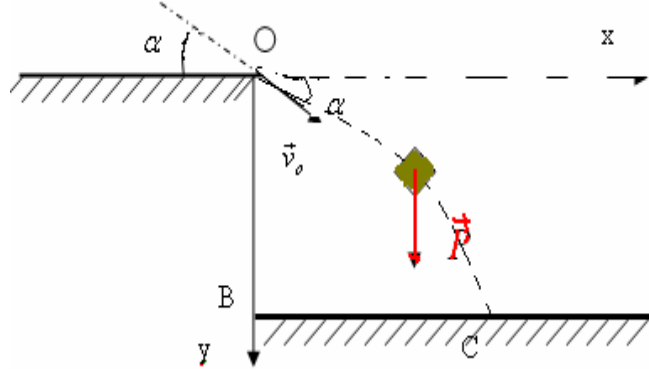
$$a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}}$$

ت.ع:  $a = \frac{0,25 \cdot 10 \cdot 0,5}{0,25 + \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}}} = \frac{1,25}{0,25 + \frac{25 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^{-4}}} = \frac{1,25}{1,25} = 1 \text{ m.s}^{-2}$  ( هذا التطبيق العددي لا يحتاج إلى استعمال الآلة الحاسبة )

ينتقل الجسم  $S$  على مسار مستقيمي بتسارع ثابت إذن حركته مستقيمة متغيرة بانتظام. 2-1: بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن بين الموضعين  $A$  و  $O$ :

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot a \cdot OA} = \sqrt{2 \times 1 \times 2} = 2 \text{ m/s} : v_A = 0 \text{ وبما أن } v_0^2 - v_A^2 = 2 \cdot a \cdot OA$$

(2) عندما يغادر الجسم  $S$  المستوى المائل في النقطة  $O$  يصبح خاضعا لتأثير وزنه  $\vec{P}$  فقط.



\* متجهة السرعة  $\vec{v}_0$  في النقطة  $O$ :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{V}_0 \\ V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{لها إحداثيتين في المعلم } (0, x, y) \\ \text{وتكون زاوية } \alpha \text{ مع المحور } 0x. \end{array}$$

العلاقة الأساسية للديناميك (القانون الثاني لنيوتن) تكتب كما يلي:  $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$

\* إسقاطها على المحور  $oy$ :  $+P = m \cdot a_y \Leftrightarrow m \cdot g = m \cdot a_y \Leftrightarrow a_y = g$  الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

وبذلك تكون المعادلة الزمنية للحركة حسب هذا المحور:  $y = \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$  أي:

$$y = 5t^2 + t \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$$

\* إسقاطها على المحور  $ox$ :  $0 = m \cdot a_x \Leftrightarrow a_x = 0$  أي: الحركة مستقيمة منتظمة تتم

بسرعة ثابتة وهي:  $v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$  إذن: المعادلة الزمنية للحركة حسب  $ox$  هي:  $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$

$$x = 1,73t$$

(2-2) لتكن  $t_c$  مدة السقوط الحر للجسم  $S$ . عند وصول الجسم  $S$  إلى النقطة  $C$  يكون لدينا:

$$0,75 = 5t_c^2 + t_c \quad \text{نعوض في (3):} \quad y = y_c = y_B = OB$$

$$5t_c^2 + t_c - 0,75 = 0 \quad \text{أي:}$$

$$\text{هذه المعادلة لها حلين: } t_c = \frac{-1 \pm 4}{10} \quad \text{أي } 0,3 \text{ و } -0,5 \text{ وبما أن } t > 0 \text{ فإن: } t_c = 0,3 \text{ s}$$

تحديد المسافة  $BC$

لدينا:  $BC = xc$  ونعوض في  $x$  المتغيرة  $t$  بمدة السقوط  $t_c$ :

$$xc = 1,73t_c = 1,73 \cdot 0,3 = 51,9 \text{ m} \approx 52 \text{ m}$$

(3) (1-3) نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة بعد انفلات الحبل: فهي لا تخضع لوزنها  $\vec{P}$  وتأثير محور

الدوران  $\vec{R}$  بالإضافة إلى المزدوجة المقاومة ذات العزم  $M_{\Delta} = -7,5 \times 10^{-2} N.m$

أي:  $M_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$  إذن: 2-3 : في لحظة انفلات الحبل السرعة الزاوية

$$\omega_0 = \frac{v_o}{r} = \frac{2}{5.10^{-2}} = 40 \text{ rad / s}$$

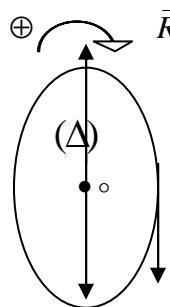
بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن:  $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \cdot \ddot{\theta} \cdot \Delta\theta$  مع السرعة الزاوية عند التوقف  $\omega = 0$  و

$$n = \frac{-\omega^2}{4 \cdot \pi \cdot \ddot{\theta}} = 4,25 \quad \Delta\theta = 2\pi \cdot n \text{ تمثل عدد الدورات التي أنجزتها الاسطوانة قبل التوقف.}$$

(1 II)

(1-1) بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة التي تخضع للقوى التالية:

$\vec{P}$ : وزن البكرة. و  $\vec{R}$ : تأثير محور الدوران  $\Delta$  ثم  $\vec{F}$ : القوة المطبقة على البكرة.



$$\begin{aligned} \sum M\vec{F}_{\Delta} &= J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \\ M\vec{F}_{\Delta} + M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{R}_{\Delta} &= J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \end{aligned}$$

نختار منحى موجبا للدوران (انظر الشكل)

وبما عزم  $\vec{P}$  وعزم  $\vec{R}$  منعدمان لان خطي تأثيرهما يتقاطعان مع محور الدوران (لا مقدرة لهما على إدارة البكرة) فإن

العلاقة السابقة تصبح:

$$+ F \times d + 0 + 0 = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \quad (1)$$

مع:  $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m r^2$  و  $[d = r]$  و  $[F = \frac{m \cdot g}{2}]$  إذن العلاقة (1) تصبح:

$$\ddot{\theta} = \frac{10}{5.10^{-2}} = 200 \text{ rad / s}^2 \quad \text{ت.ع.} \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{r} \quad \text{ومنه} \quad \frac{m \cdot g}{2} \cdot r = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \ddot{\theta}$$

(2-1) بما أن حركة البكرة دورانية متغيرة بانتظام متسارعة. المعادلة الزمنية للحركة تكتب كما يلي:

$$\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} \times t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (a)$$

عندما ينجز القرص دورة كاملة:  $\theta = 2\pi$  ومن خلال المعطيات:  $\theta_0 = 0$  و  $\omega_0 = 0$  إذن العلاقة (a) تصبح:

$$\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} \times t^2 \quad \text{ومنه}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times \theta}{\ddot{\theta}}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\pi}{200}} = 0,25 \text{ s}$$

(3-1) من خلال دالة السرعة الزاوية:  $\omega = \dot{\theta} \cdot t + \theta_0$  مع  $\theta_0 = 0$  إذن:  $\omega = 200t$

وفي اللحظة  $t = 0,25 \text{ s}$  نحصل على:

$$\omega = 200 \cdot 0,25 = 50 \text{ rad / s}$$

(2) 1-2 لتكن  $\omega_1$  السرعة الزاوية لدوران القرص في لحظة انفصاله عن الخيط أي اللحظة التي تصير فيها سرعة القرص 10 دورات في الثانية. نعلم أن عدد الدورات في الثانية يمثل التردد  $N$  (لان الدور  $T$  هي المدة التي

ينجز فيها القرص دورة واحدة. فبما أنه أصبح ينجز  $n$  دورة في  $1 \text{ s}$  إذن دورة سينجزها في  $\frac{1}{n}$  وهو الدور

$T$  وهو مقلوب التردد وبالتالي عددا لدورات في الثانية  $n$  يعبر عن التردد  $(. N$

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi.N$$

إذن:  $\omega_1 = 2\pi.N_1 = 2 \times 3,14 \times 10 = 62,8 \text{ rad/s}$  ولتكن  $\omega_F$  السرعة الزاوية للقرص عند التوقف  $\omega_F = 0$ .

بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن على القرص بين لحظة انفصاله عن الخيط ولحظة توقفه عن الحركة :

$$(1) \quad \omega_F^2 - \omega_1^2 = 2.\dot{\theta}'.\Delta\theta$$

مع  $\Delta\theta = 2\pi n$  و  $\omega_F = 0$  وهكذا (1) تصبح  $-\omega_1^2 = 4.\dot{\theta}'\pi.n$  إذن:  $n = \frac{-\omega_1^2}{4.\pi.\dot{\theta}'}$  ومن

خلال دالة السرعة الزاوية (باعتبار لحظة الانفصال هي اللحظة  $t = 0$ ) لدينا:  $\omega_F = \dot{\theta}' \times t + \omega_1$  مع: بما أنه يتم

التوقف بعد 5 دقائق:  $\dot{\theta}' = \frac{-\omega_1}{t}$  مع (c)  $\omega_1 = 62,8 \text{ rad/s}$  و  $t = 5 \text{ mn} = 300 \text{ s}$  و  $\omega_F = 0$  :

نعوض (c) في (b) فنحصل على:

$$n = \frac{\omega_1.t}{4.\pi} = \frac{62,8 \times 300}{4 \times 3,14} = 1500 \text{ tr}$$

(2-2) بتطبيق ع.أ.للتحريك على البكرة في المرحلة الأخيرة (بعد انفصالها عن الخيط) نحصل على :

$$\omega_1 = 62,8 \text{ rad/s} \quad \dot{\theta}' = \frac{-\omega_1}{t} \quad \text{مع} \quad 0 + 0 + M = \frac{1}{2} m.r^2.\ddot{\theta}' \quad \Leftarrow \quad M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta + M = J_\Delta.\ddot{\theta}'$$

$$M = -0,105.m \times r^2 \quad \text{إذن:} \quad \ddot{\theta}' = \frac{-62,8}{300} \approx -0,21 \text{ rad/s}^2 \quad \text{و} \quad t = 5 \text{ mn} = 300 \text{ s}$$

**Sbiro abdelkrim** email: [sbiabdou@yahoo.fr](mailto:sbiabdou@yahoo.fr)