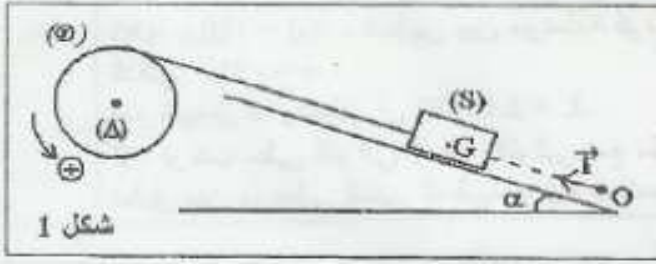


## موضوع البكالوريا فى الميكانيك لدورة يونيو 2007 / 2008

موضوع شعبة العلوم التجريبية: الإمتحان الوطنى



شكل 1

التمرين 1 (5,5 نقط)

نهمل جميع الاحتكاكات و نأخذ  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

- 1- تعتبر قرصا متجانسا (D) ، شعاعه  $r = 10 \text{ cm}$  قابلا للدوران حول محور أفقى ثابت (Δ) منطبق مع محور تماثله. نلف حول القرص خيطا، غير قابل للامتداد، كتلته مهملة ولا ينزلق على القرص، ونثبت بطرفه الحر جسما صلبا (S) كتلته  $m = 0,5 \text{ kg}$ .

الجسم (S) قابل للانزلاق على سطح مائل بالزاوية  $\alpha = 30^\circ$  بالنسبة للمستوى الأفقى (شكل 1). نطبق، بواسطة محرك، على القرص (D) مزدوجة محركة عزما  $\mathcal{M}$  ثابت، فينطلق مركز القصور G للجسم

(S) بدون سرعة من الموضع O لينتقل وفق المحور  $(O, \vec{i})$  بتسارع ثابت  $a = 2 \text{ m.s}^{-2}$ .

- 1.1- حدد طبيعة حركة كل من الجسم (S) والقرص (D).
- 1.2- اكتب المعادلة الزمنية  $x(t)$  لحركة G باسناد الموضع O أصلا للأفاصيل واللحظة التي تأخذ فيها سرعة (S) القيمة  $1 \text{ m.s}^{-1}$  أصلا للتواريخ.

1.3- احسب عند اللحظة  $t = 0,5 \text{ s}$  التسارع المماسي  $a_T$  والتسارع المنظمي  $a_N$  لنقطة من محيط القرص.

1.4- أوجد قيمة العزم  $\mathcal{M}$  للمزدوجة المحركة.

عزم قصور القرص بالنسبة للمحور (Δ) هو  $J_\Delta = 9 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$ .

- 2- نأخذ القرص (D) ونثبت في مركزه I سلك لي رأسى، كتلته مهملة وثابتة ليه C فنحصل على متذبذب (شكل 2).

ندير القرص (D) بزاوية  $\theta_m$  ، انطلاقا من موضع التوازن ( $\theta = 0$ ) حيث السلك غير ملتو، ثم نحرر القرص بدون سرعة بدئية، فينجز حركة تذبذبية حول محور رأسى (Δ') منطبق مع محور السلك. عزم قصور القرص بالنسبة للمحور (Δ') هو  $J_{\Delta'} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$ .

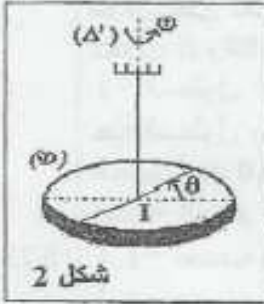
نعتبر موضع التوازن حالة مرجعية لطاقة وضع اللي ( $E_p = 0$ ).

- 2.1- اعتمادا على الدراسة الطاقية، أثبت المعادلة التفاضلية لحركة القرص (D).

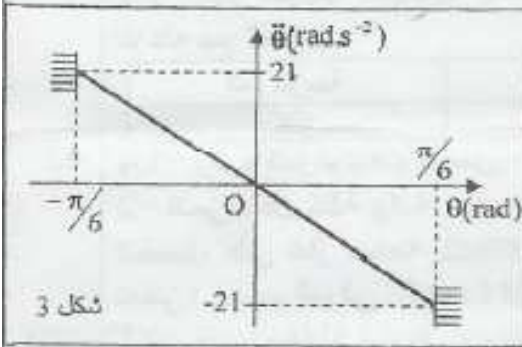
2.2- يمثل منحني الشكل 3 تغيرات التسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  للقرص بدلالة الأفضول الزاوي  $\theta$ .

أوجد، اعتمادا على المبيان، قيمة كل من الوسع  $\theta_m$  والنبض الخاص  $\omega_0$  لحركة المتذبذب واستنتج قيمة ثابتة اللي C.

2.3- احسب الطاقة الميكانيكية للمتذبذب. نأخذ  $\pi^2 = 10$ .



شكل 2



شكل 3

### التصحیح

الفيزياء

التمرين 1

- 1-1: حركة الجسم S مستقيمة متغيرة بانتظام متسارعة نحو الأعلى. وحركة القرص دورانية متغيرة بانتظام.

1-2: المعادلة الزمنية لحركة G تكتب كما يلي :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

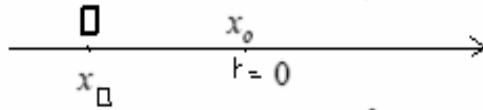
من خلال المعطيات لدينا : الجسم ينطلق بدون سرعة من  $\square$  اصل

مع :  $a = 2m/s^2$  و  $v_0 = 1m/s$

المعلم  $v_0 = 0$

بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن بين  $\square$  والنقطة المطابقة لاصل التواريخ .

ومنه :  $v_0^2 = 2.a.x_0 \iff v_0^2 - v_0^2 = 2a.(x_0 - x_0)$



$x_0 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{1}{2 \times 2} = 0,25m$

$x = t^2 + t + 0,25$

إذن :

1-3 : من خلال دالة السرعة :  $v = at + v_0$  التي تكتب كما يلي :  $v = 2t + 1$

لدينا :  $\frac{dv}{dt} = 2$

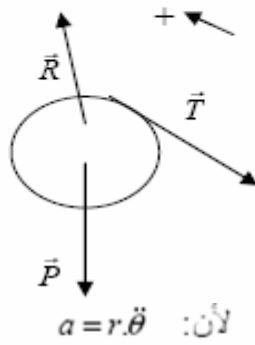
إذن : التسارع المماسي :  $a_T = \frac{dv}{dt} = 2m/s^2$

وفي اللحظة  $t = 0,5s$  تكون قيمة السرعة :  $v = 2 \times 0,5 + 1 = 2m/s$

إذن التسارع المظمي :  $a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{2^2}{0,1} = 40m/s^2$

1-4 : بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على كل من البكرة والجسم S لدينا :

بالنسبة للبكرة :  $\sum M_{\Delta} \vec{F} = J_{\Delta} \ddot{\theta}$



$M_{\Delta} \vec{P} + M_{\Delta} \vec{R} + M_{\Delta} \vec{T} + M = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

لأن العزم محرك  $0 + 0 - Tr + M = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

ومنه :  $(1) M = J_{\Delta} \cdot \frac{a}{r} + Tr$

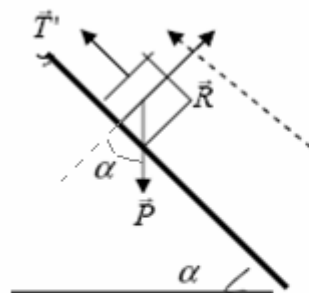
لأن :  $a = r \cdot \ddot{\theta}$

وبالنسبة للجسم S لدينا  $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}' = m \cdot \vec{a}_G$

بالإسقاط على  $ox$  :  $-P \cdot \sin \alpha + 0 + T' = m \cdot a$

الخيط غير قابل للمد  $T' = T$



ومنه

$T = m(g \cdot \sin \alpha + a) = 0,5 \times (10 \times 0,5 + 2) = 3,5N$

وبالتعويض في العلاقة (1) لدينا :

$M = J_{\Delta} \cdot \frac{a}{r} + Tr = 9 \times 10^{-2} \times \frac{2}{0,1} + 3,5 \times 0,1 = 0,53N.m$

(2) 2-1 :

$E_M = \frac{1}{2} c \cdot \theta^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}^2 = Cte$  أي :  $E_M = Ec + Ep$

$J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} + C\theta = 0$  ومنه :  $\frac{dE_M}{dt} = \frac{1}{2} c \times 2\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2} J_{\Delta} \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$

أي:  $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \theta = 0$  المعادلة التفاضلية للحركة ونبضها الخاص:  $\omega_0^2 = \frac{C}{J_{\Delta}}$

وأخيرا المعادلة التفاضلية تصبح:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

2-2: ميانيا لدينا:  $\theta_m = \frac{\pi}{6}$

والمنحنى الممثل لتغيرات  $\dot{\theta}$  بدلالة  $\theta$  عبارة عن دالة خطية معاملها الموجه

$$k = \frac{\Delta \dot{\theta}}{\Delta \theta} = \frac{21 - 0}{-\frac{\pi}{6} - 0} = -\frac{21 \times 6}{\pi} \approx -40$$

إذن معادلته: (a)  $\ddot{\theta} = -40\theta$

ومن خلال المعادلة التفاضلية السابقة لدينا: (b)  $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$

من خلال (a) و (b):  $\omega_0^2 = 40$  وبالتالي: النبض

الخاص  $\omega_0 = \sqrt{40} \approx 6,33 \text{ rad/s}$

ونابتة اللي:  $C = J_{\Delta} \omega_0^2 = 9 \times 10^{-3} \times 40 = 0,36 \text{ N.m/rad}$

2-3: الطاقة الميكانيكية للمتذبذب:  $E_M = \frac{1}{2} c \theta_m^2 = 0,5 \times 0,36 \times \frac{\pi^2}{36} = 0,5 \times 0,36 \times \frac{10}{36} = 0,05 \text{ J}$

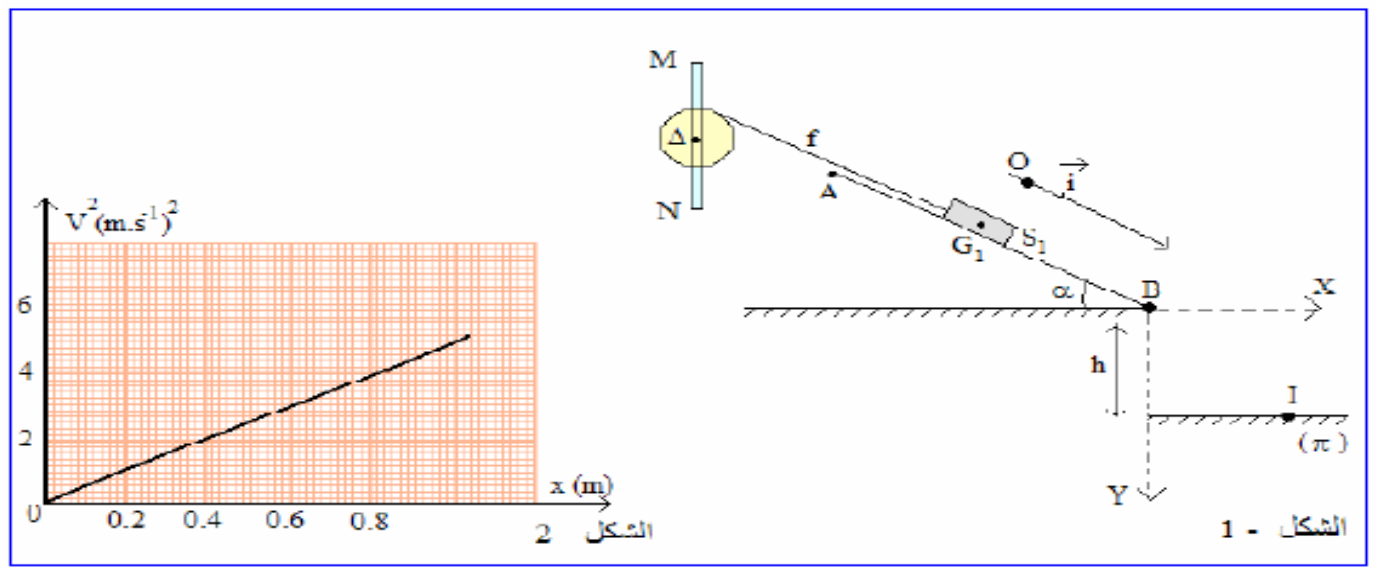
## موضوع الامتحان الوطني في الميكانيك لدورة يونيو علوم رياضية 2007

التمرين 1- (5.5 نقط)

نهمل جميع الاحتكاكات و نأخذ  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  و  $\pi^2 = 10$ .

نعتبر المجموعة (S) الممتلئة في الشكل - 1 و التي تتكون من:

- بكرة متجانسة شعاعها  $r = 5 \text{ cm}$  ملتحمة بساق طولها  $MN = 2L = 40 \text{ cm}$  يتطابق مركز قصورها مع المركز  $G$  للبكرة. المجموعة " الساق + البكرة " قابلة للدوران في المستوى الرأسي حول محور أفقي ( $\Delta$ ) ثابت يمر من المركز  $G$ . عزم قصور المجموعة بالنسبة للمحور ( $\Delta$ ) هو  $J_{\Delta}$ .
  - خيط ( $f$ ) غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة و تبت احد طرفيه بجسم صلب ( $S_1$ )، كتلته  $m = 0,8 \text{ kg}$  و مركز قصوره  $G_1$ . الجسم ( $S_1$ ) قابل للانزلاق على مستوى مائل بواوية  $\alpha = 30^\circ$  بالنسبة للمستوى الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا.
- نعتبر أن الخيط ( $f$ ) لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة. نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية عند اللحظة  $t = 0$  حيث يكون  $G_1$  منطبقا مع الأصل  $O$  للمعلم ( $O, \vec{i}$ ). نعلم عند كل لحظة موضع  $G_1$  بالافصول  $x$ .



الشكل - 1

1 - أوجد ، اعتمادا على الدراسة التحريكية ، تعبير التسارع  $a$  لحركة الجسم  $(S_1)$  بدلالة :  $m$  ،  $J_{\Delta}$  ،  $r$  ،  $g$  و  $\alpha$  .

2 - يمثل منحني الشكل - 2 تغيرات مربع السرعة للجسم  $(S)$  بدلالة  $x$  :  $V^2 = f(x)$  .

1 - 2 - حدد قيمة  $a$  و استنتج قيمة التسارع الزاوي  $\dot{\theta}$  للمجموعة " الساق + البكرة "

2 - 2 - انفصل الجسم  $(S_1)$  عن الخيط لحظة مروره بالنقطة  $B$  ذات الإحداثيات  $x_B = 0.8m$  فيسقط عند نقطة  $I$  على المستوى الأفقي  $(\pi)$  الذي يوجد على مسافة  $h = 1m$  من النقطة  $B$  .

2 - 2 - 1 - أوجد إحداثيتي النقطة  $I$  في المعلم  $(\overline{BX}, \overline{BY})$  .

2 - 2 - 2 - احسب السرعة الخطية للطرف  $M$  للساق بعد انفصال الجسم  $(S_1)$  عن الخيط .

3 - نعيد ربط الخيط بالجسم  $(S_1)$  و نثبت بالساق في نقطة  $M'$  ، بحيث  $MM' = \frac{L}{2}$  ، نابضا لفاته غير

متصلة و كتلته مهملة و صلابته  $K = 50N.m^{-1}$  ، الطرف الثاني للنابض مثبت بحامل " الشكل - 3 " . يكون النابض عند التوازن أفقيا و مطاللا و الساق  $MN$  رأسية و أقصاؤها  $G_1$  منطبقا مع الأصل  $O$  للمعلم  $(O; \vec{k})$  .

3 - 1 - أوجد ، عند التوازن ، تعبير إطالة النابض  $\Delta l$  بدلالة المقادير اللازمة .

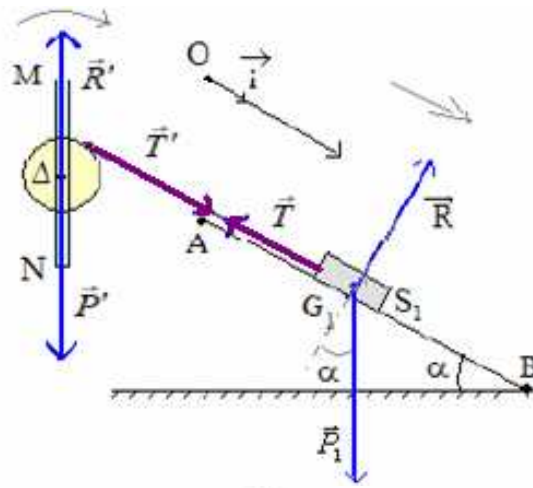
3 - 2 - نزيح الجسم  $(S_1)$  عن موضع توازنه بمسافة  $d = 1m$  نحو الأسفل وفق الخط الأكبر ميلا فتدور

المجموعة " الساق + البكرة " بزاوية صغيرة  $\theta_0$  و نحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة  $t = 0$  .

### التصحيح

- 1

- المجموعة المدروسة : الجسم  $(S_1)$
  - المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا
  - جرد القوى : وزن الجسم  $\vec{P}_1$  ، تأثير السطح  $\vec{R}$  ، تأثير الخيط  $(f)$   $\vec{T}$  .
  - تطبيق ع . أ . د :  $\sum \vec{F}_{APP} = m_1 \cdot \vec{a}$  و منه :  $\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T} = m_1 \cdot \vec{a}$  .
  - إسقاط ع . أ . د على المحور  $(O; \vec{i})$  نحصل على :  $m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - T = m_1 \cdot a$
- و بالتالي :  $T = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - m_1 \cdot a$  (1)



حساب التسارع الزاوي للمجموعة :  $\ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{2.5}{5.10^{-2}} = 50 \text{ rad.s}^{-2}$

2-2-1 - إحدائتي النقطة I :

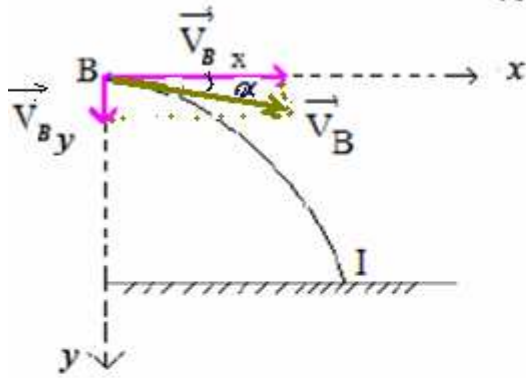
• حساب السرعة  $V_B$

باستعمال العلاقة المستقلة عن الزمن بين الموضعين O و B ،

نجد سرعة الجسم ( $S_1$ ) عند الموضع B :

$$V_B = \sqrt{2 \cdot a \cdot x_B} = 2 \text{ m.s}^{-1}$$

• المعادلتين الزمئيتين :



بعد إقصاء الزمن  $t = \frac{x}{V_B \cdot \cos(\alpha)}$  نحصل على معادلة المسار

$$\begin{cases} x = V_B \cdot \cos(\alpha) t \\ y = \frac{1}{2} \cdot g t^2 + V_B \cdot \sin(\alpha) t \end{cases}$$

$$y = \frac{g}{2V_B^2 \cdot \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x \text{ و منه : } y_I = h = \frac{g}{2V_B^2 \cdot \cos^2(\alpha)} x_I^2 + \tan(\alpha) x_I$$

• المجموعة المدروسة : البكرة

• المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا

• جرد القوى : وزن البكرة  $\vec{P}'$  ، تأثير محور الدوران  $\vec{R}'$  ، تأثير الخيط  $\vec{T}'$  (f)

• تطبيق ع . أ . د :  $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{app}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$  و منه :

$$M_{\Delta}(\vec{P}') = M_{\Delta}(\vec{R}') = 0 \text{ مع } M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{R}') + M_{\Delta}(\vec{T}') = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

و بالتالي نحصل على المعادلة التالية :  $T' \cdot r = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$  (2)

بما أن الخيط غير ممدود و كتلته مهملة فان :  $T' = T$  و من جهة أخرى لا ينزلق على مجرى البكرة فان :

$$a = g \cdot \frac{m \cdot \sin \alpha}{m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}} \text{ و منه : } \ddot{\theta} = \frac{a}{r} \text{ و } \theta = \frac{x}{r} \text{ من المعادلتين (1) و (2) نستنتج تعبير تسارع الجسم حيث :}$$

2-1-1  $V^2 = f(x)$  دالة خطية معادلتها :  $V^2 = Kx$  مع K يمثل المعامل الموجه للمنحنى ، نحصل باستنتاج

$$a = \frac{K}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(V^2)}{\Delta(x)} = 2.5 \text{ m.s}^{-2} \text{ و منه : } 2 \cdot V \cdot \frac{dV}{dt} = KV$$

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية :  $\frac{g}{2.V_B^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x_I^2 + \tan(\alpha) \cdot x_I - h = 0$  التي يمكن كتابتها على

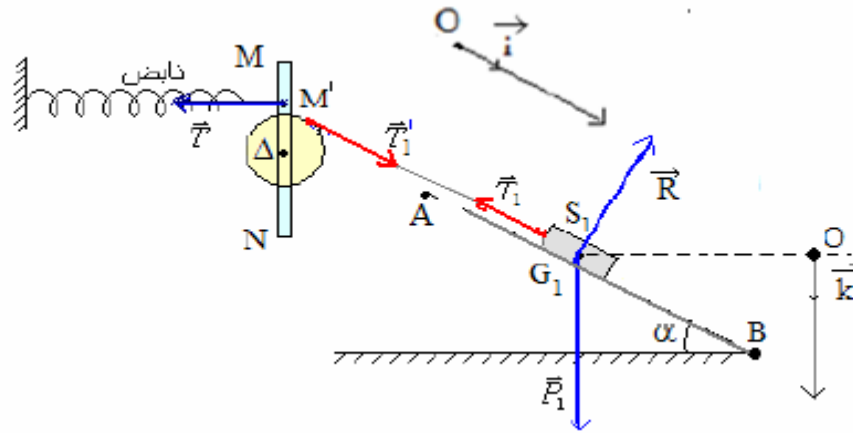
الشكل التالي :  $1.66 \cdot x_I + 0.577 \cdot x_I - 1 = 0$  و أحد حلولها  $x_I = 0.62m$

$$\left. \begin{array}{l} x_I = 0.62m \\ y_I = 1m \end{array} \right\} \text{إحداثيتي النقطة } I$$

2-2-2 السرعة الخطية للطرف M بعد انفصال الجسم :

$$\frac{V_B}{r} = \frac{V_M}{L} \quad \text{و } \dot{\theta}_B = \dot{\theta}_M$$

$$\text{و بالتالي : } \boxed{V_M = V_B \frac{L}{r} = 8m \cdot s^{-1}}$$



1-3 دراسة التوازن :

• الجسم ( $S_1$ ) :  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  و منه :  $T_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

• البكرة :  $\sum M_\Delta = 0$  و منه  $T \cdot \frac{L}{2} = T_1' \cdot r$  حيث  $T = K \cdot \Delta l$  و  $T_1' = T_1$

$$\boxed{\Delta l = 2 \cdot \frac{m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha)}{K \cdot L}}$$

3-2-1 - الدراسة الطاقية للمجموعة " (S) "

• الطاقة الحركية :  $E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot J_\Delta \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot J_\Delta \cdot \frac{V^2}{r^2} = \left( \frac{J_\Delta}{r^2} + m \right) \frac{V^2}{2}$

• طاقة الوضع المرنة :  $E_{Pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta l + d)^2 + C^{te}$  مع التابتة  $C^{te} = 0$  حسب مرجع طاقة الوضع

المرنة و كذلك :  $d = \frac{L}{2} \cdot \theta$  و بالتالي :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \left( \Delta l + \frac{L}{2} \cdot \theta \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta l^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \frac{L^2 \cdot \theta^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta l \cdot \theta$$

• طاقة الوضع الثقالية :  $E_{pp} = -m \cdot g \cdot z + C^{te} = 0$  مع التابتة  $C^{te}$  و بالتالي :  $E_{pp} = -m \cdot g \cdot z$

بما ان جميع الاحتكاكات مهملة فان الطاقة الميكانيكية تتحفظ و بالتالي :  $\frac{dE_m}{dt} = 0$  و منه نحصل بالاشتقاق على :

$$\frac{dE_c}{dt} = \left( \frac{J_{\Delta}}{r^2} + m \right) V \cdot \dot{V} = \left( \frac{J_{\Delta}}{r^2} + m \right) \dot{x} \cdot \dot{x} = \left( \frac{J_{\Delta}}{r^2} + m \right) \frac{\dot{z}}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{\ddot{z}}{\sin(\alpha)}$$

$$\frac{dE_{pe}}{dt} = K \cdot L^2 \frac{\theta \cdot \dot{\theta}}{4} + \frac{K \cdot \Delta l \cdot L \cdot \dot{\theta}}{2} = K \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{\dot{x}}{r} + \frac{K \cdot \Delta l \cdot L \cdot \dot{x}}{r}$$

$$\frac{dE_{pe}}{dt} = K \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \frac{z}{r \cdot \sin(\alpha)} \cdot \frac{\dot{z}}{r \cdot \sin(\alpha)} + \frac{K \cdot \Delta l \cdot L \cdot \dot{z}}{2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)}$$

$$z = x \sin \alpha$$

$$\frac{dE_{pp}}{dt} = -m \cdot g \cdot \dot{z}$$

و بالتعويض :

$$\frac{dE_m}{dt} = \left( \frac{J_{\Delta}}{r^2} + m \right) \frac{\dot{z} \cdot \ddot{z}}{\sin^2(\alpha)} + \frac{K \cdot L^2 \cdot z \cdot \dot{z}}{4 \cdot r^2 \cdot \sin^2(\alpha)} + \frac{K \cdot L \cdot \Delta l \cdot \dot{z}}{2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)} - m \cdot g \cdot \dot{z} = 0$$

من خلال العلاقة المحصل عليها في الدراسة السكونية :  $m \cdot g = \frac{K \cdot L \cdot \Delta l}{2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)}$  و بالتالي :

$$\frac{dE_m}{dt} = \left( \frac{J_{\Delta}}{r^2} + m \right) \frac{\dot{z} \cdot \ddot{z}}{\sin^2(\alpha)} + \frac{K \cdot L^2 \cdot z \cdot \dot{z}}{4 \cdot r^2 \cdot \sin^2(\alpha)} = 0$$

و بالتالي :  $\left( \frac{J_{\Delta}}{r^2} + m \right) \ddot{z} + \frac{K \cdot L^2 \cdot z}{4 \cdot r^2} = 0$  و منه نحصل على المعادلة التفاضلية :  $\ddot{z} + \frac{K \cdot L^2}{4 \cdot (J_{\Delta} + m \cdot r^2)} \cdot z = 0$

معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية معاملها  $\omega_0^2 = \frac{K \cdot L}{4 \cdot (J_{\Delta} + m \cdot r^2)}$  ثابت و موجب و حلها جيبى .

3 - 2 - 2 - المعادلة الزمنية لحركة الجسم :  $z = z_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$  حيث :  $\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{0.5} = 4 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  و

$\varphi = 0$  لان عند  $t = 0$   $z = z_m = d \cdot \sin(\alpha)$  و بالتالي :  $z = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t)$

تصحيح الموضوع الأول : عبد الكريم سبيرو

الموضوع الثاني : عبد العلي رضوان

Sbiro abdelkrim lycée agricole oulad-taima région d'agadir maroc  
MAIL : [sbiabdou@yahoo.fr](mailto:sbiabdou@yahoo.fr) msn messenger : [sbiabdou@hotmail.fr](mailto:sbiabdou@hotmail.fr)