

المرجح

تمرين 1

- A و B نقطتان مختلفتان. أنشئ النقط التالية : (أنشئ أشكالا مستقلة)
- 1- G مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$
 - 2- E مرجح النقطتين المترتبتين $(A, -1)$ و $(B, 3)$
 - 3- K مرجح النقطتين المترتبتين $(A, -1)$ و $(B, 2)$
 - 4- I مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 100)$ و $(B, 100)$

تمرين 2

- A و B و C نقط غير مستقيمة. لكن G مرجح النقط المترتبة $(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 3)$
- 1- اكتب \overrightarrow{BG} بدلالة \overrightarrow{BA} و \overrightarrow{BC} ثم أنشئ النقطة G
 - 2- باستعمال تجميعية المرجح أنشئ النقطة G

تمرين 3

- ABC مثلث.
- 1- أنشئ G مرجح النقط المترتبة $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$
 - 2- ماذا تمثل G بالنسبة للمثلث ABC ؟

تمرين 4

- $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O .
- بين أن O هو مرجح النقط المترتبة $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 1)$

تمرين 5

- A و B نقطتان مختلفتان. ليكن G مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$
- 1- بين أن A مرجح النقطتين المترتبتين $(G, -3)$ و $(B, 1)$
 - 2- بين أن B مرجح النقطتين المترتبتين $(G, -6)$ و $(A, 4)$

تمرين 6

- A و B نقطتان مختلفتان.
- 1- أنشئ E مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 3)$ و $(B, -1)$
 - 2- أنشئ F مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 1)$ و $(B, -3)$
 - 3- بين أن القطعتين $[AB]$ و $[EF]$ لهما نفس المنتصف .

تمرين 7

- ABC مثلث حيث $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$
- 1- أنشئ النقط :
 I مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 1)$ و $(B, 2)$
 J مرجح النقطتين المترتبتين $(C, 3)$ و $(A, 1)$
 K مرجح النقطتين المترتبتين $(B, 2)$ و $(C, 3)$
 - 2- أنشئ G مرجح النقط المترتبة $(A, 1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 3)$
 - 3- بين أن المستقيمت (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

تمرين 8

- $\vec{DE} + 3\vec{EC} = \vec{0}$ و $2\vec{DA} + \vec{DB} = \vec{0}$: حيث D و E نعتبر النقطتين ABC مثلث.
- 1- عبر عن D كمرجح للنقطتين A و B
 - 2- عبر عن E كمرجح للنقطتين D و C
 - 3- بين أن النقطة C مرجح النظمة المترنة $\{(A,2); (B,1); (E,6)\}$
 - 4- لتكن H مرجح النقطتين المترنتين $(A,1)$ و $(E,3)$.
بين أن النقط B و C و H مستقيمة .

تمرين 9

- ABC مثلث. لتكن O منتصف $[BC]$ و لتكن H مرجح النظمة المترنة $\{(C,2); (B,2); (A,-1)\}$
- 1- بين أن $\vec{OH} = \frac{-1}{3} \vec{OA}$ ثم أنشئ النقطة H
 - 2- لتكن G مركز ثقل المثلث ABC . بين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$

تمرين 10

- $ABCD$ متوازي أضلاع .
- لتكن E مرجح النقطتين المترنتين $(C,1)$ و $(B,2)$ و F مرجح النقطتين المترنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$
- 1- أنشئ الشكل
 - 2- بين أن A مرجح النقطتين المترنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$
 - 3- ماذا تنتج؟

تمرين 11

- ABC مثلث.
- لتكن E مرجح النقطتين المترنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$ و F مرجح النقطتين المترنتين $(A,2)$ و $(B,1)$
- 1- أنشئ الشكل
 - 2- بين أن $(CF) \parallel (AE)$

تمرين 12

- $ABCD$ رباعي محدب . ليكن E و F هما على التوالي مركزا ثقلي المثلثين ABC و ADC
- ◆ بين أن $(EF) \parallel (BD)$

تمرين 13

- ABC مثلث. E و I و F نقط حيث $\vec{AE} = \frac{-2}{5} \vec{AB}$ و I منتصف $[BC]$ و $\vec{CF} = \frac{7}{9} \vec{CA}$
- 1- عبر عن E و I و F كمرجح للنقط A ، B أو C
 - 2- برهن أن النقط E و I و F مستقيمة.

تمرين 14

- المستوى منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . نعتبر النقط $A(3,4)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$.
- ليكن E منتصف $[BC]$ و G مرجح النقطتين المترنتين $(A,1)$ و $(E,2)$
- 1- أوجد إحداثيتي كل من E و G
 - 2- استنتج أن النقط O و G و C مستقيمة.

تمرين 15

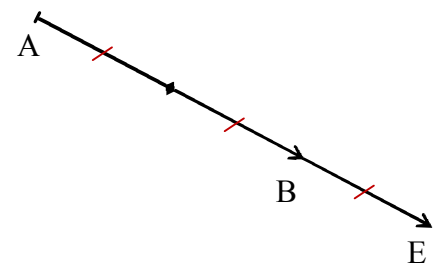
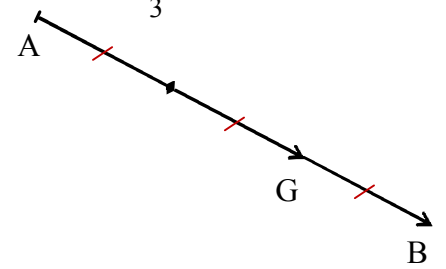
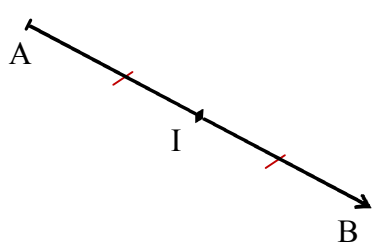
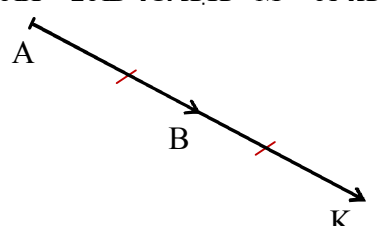
- ABC مثلث .
- 1- حدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\vec{AM}\| = \|\vec{BC}\|$ ثم أنشئها .
 - 2- حدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\vec{BM}\| = \|\vec{AB} - \vec{AC}\|$ ثم أنشئها .

ABC مثلث حيث $AB=6$ و $AC=4$ و $BC=5$. G مركز ثقل المثلث ABC .

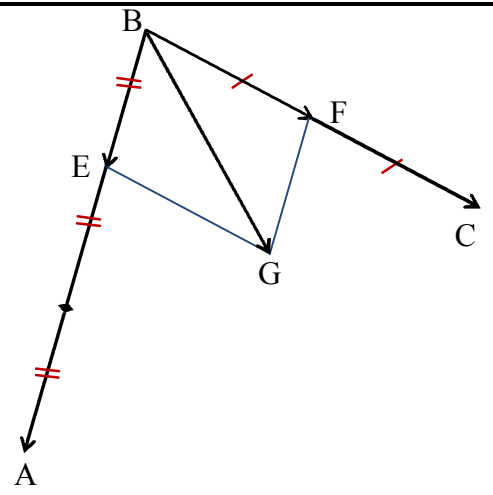
- 1- حدد و أنشئ (ζ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 6$.
- 2- حدد و أنشئ (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$.
- 3- حدد و أنشئ (L) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MB} - \vec{MC}\|$.

المرجح

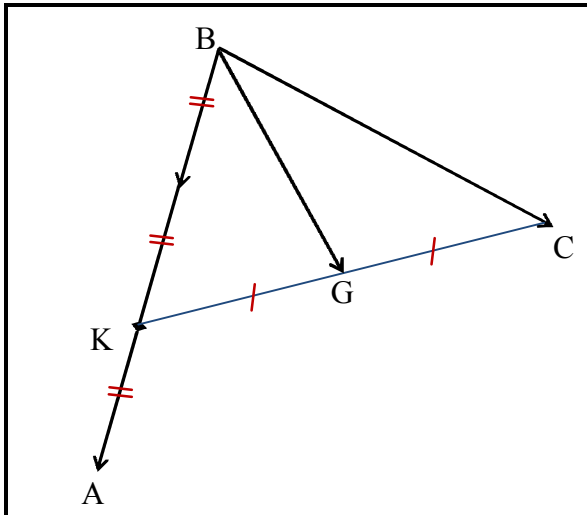
تمرين 1

<p>E مرشح النقطتين المتزتين $(A, -1)$ و $(B, 3)$</p> <p>لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:</p> $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{MA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{MB}$ <p>نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$</p> 	<p>G مرشح النقطتين المتزتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$</p> <p>لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:</p> $\forall M \in (P) \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{MB}$ <p>نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$</p> 
	<p>❖ : إذا أخذنا $M = B$ سنجد أن $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$ ، لكننا سنجد G في نفس الموضع</p>
<p>I مرشح النقطتين المتزتين $(A, 100)$ و $(B, 100)$</p> <p>بما أن المعاملان متساويان إذن I منتصف القطعة $[AB]$</p> 	<p>K مرشح النقطتين المتزتين $(A, -1)$ و $(B, 2)$</p> <p>لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:</p> $\forall M \in (P) \overrightarrow{MK} = \frac{-1}{1} \overrightarrow{MA} + \frac{2}{1} \overrightarrow{MB}$ <p>نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AK} = 2 \overrightarrow{AB}$</p> 
<p>❖ : مرشح نقطتين لهما نفس المعامل هو منتصف القطعة التي تصلهما</p>	
<p>❖ : لإيجاد علاقة متجهة تسمح بالإنشاء يمكن أيضا استعمال تعريف المرجح، لكن هذه الطريقة تتطلب في الغالب استعمال علاقة شال للحصول على المتساويات السابقة.</p>	

تمرين 2

	<p>G مرشح النقط المتزنة $(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 3)$</p> <p>إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:</p> $\forall M \in (P) \overrightarrow{MG} = \frac{2}{6} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{6} \overrightarrow{MB} + \frac{3}{6} \overrightarrow{MC}$ <p>نأخذ: $M = B$ فنجد: $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$</p> <p>❖ : لأجل الإنشاء أنشأنا أولا النقطة E حيث $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$ ثم النقطة F حيث $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ ثم أنشأنا G حيث:</p> <p>$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$ أي $BEGF$ متوازي الأضلاع</p>
---	---

تمرين 2



لتكن K مرشح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$

بما أن G مرشح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرشح $(K,3)$ و $(C,3)$
أي منتصف $[CK]$

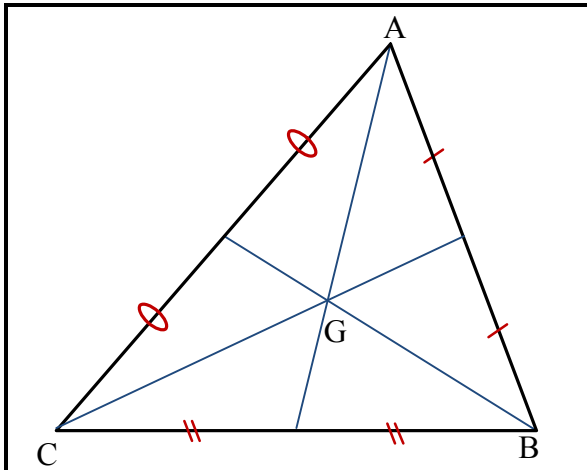
لدينا حسب الخاصية المميزة للمرشح: 2

$$\forall M \in (P) \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MB}$$

$$\text{نأخذ : } M = B \text{ : فنجد : } \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}$$

⚡ : لاحظ أنه رغم اختلاف الطريقتين إلا أن موضع النقطة G لا يتغير.

تمرين 3



بما أن G مرشح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

فإن G تمثل مركز ثقل المثلث ABC أي نقطة تقاطع متوسطاته

⚡ : مرشح ثلاث نقط لها نفس المعامل يكون هو مركز ثقل المثلث الذي رؤوسه هذه النقط.

تمرين 4

لنبين أن بين أن O هو مرشح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

$$\text{أي لنبين أن: } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

لدينا : $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O إذن O هي منتصف قطريه $[AC]$ و $[BD]$

$$\text{منه : } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ و } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \text{ : بالتالي : } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

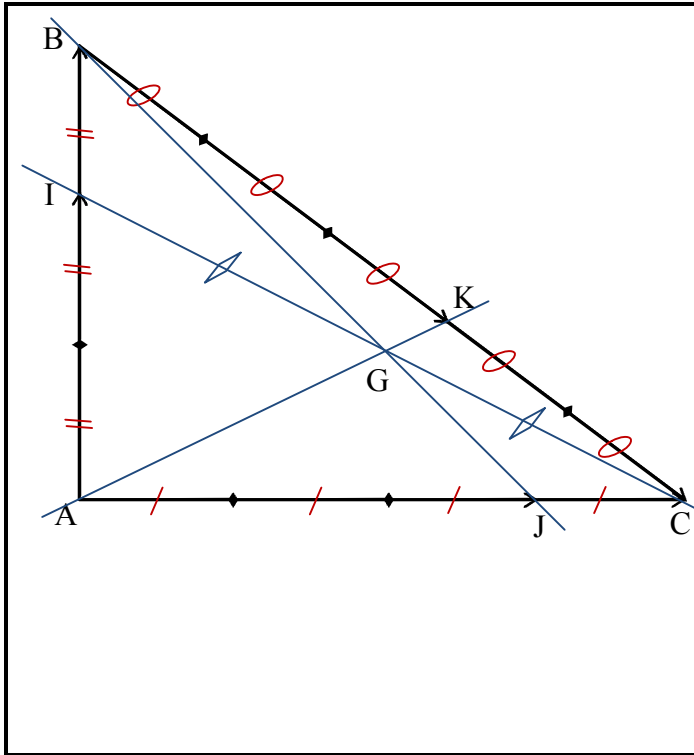
⚡ : الشكل غير ضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.

تمرين 5

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$	
بين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(G, -3)$ و $(B, 1)$ أي نبين : $-3\vec{AG} + \vec{AB} = \vec{0}$	1
لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$ منه : $2\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$ منه $2\vec{GA} + \vec{GA} + \vec{AB} = \vec{0}$ $3\vec{GA} + \vec{AB} = \vec{0}$ بالتالي : $-3\vec{AG} + \vec{AB} = \vec{0}$	
B مرجح النقطتين المتزنتين $(G, -6)$ و $(A, 4)$ أي نبين : $-6\vec{BG} + 4\vec{BA} = \vec{0}$	
بين أن B مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 4)$ و $(B, 1)$ منه : $2\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$ منه $2(\vec{GB} + \vec{BA}) + \vec{GB} = \vec{0}$	2
لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$ منه : $2\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$ منه $2\vec{GB} + 2\vec{BA} + \vec{GB} = \vec{0}$ $3\vec{GB} + 2\vec{BA} = \vec{0}$ منه $-3\vec{BG} + 2\vec{BA} = \vec{0}$ بالتالي : $-6\vec{BG} + 4\vec{BA} = 2\vec{0} = \vec{0}$	
الشكل غير ضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.	

تمرين 6

	لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 3)$ و $(B, -1)$ ، إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \vec{ME} = \frac{3}{2}\vec{MA} + \frac{-1}{2}\vec{MB}$ نأخذ: $M = A$ فيجد أن: $\vec{AE} = \frac{-1}{2}\vec{AB}$	1
	لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A, 1)$ و $(B, -3)$ ، إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \vec{MF} = \frac{1}{-2}\vec{MA} + \frac{-3}{-2}\vec{MB}$ نأخذ: $M = A$ فيجد أن: $\vec{AF} = \frac{3}{2}\vec{AB}$	2
لنكن : I منتصف $[AB]$ و لنبين أن I هي أيضا منتصف $[EF]$ أي لنبين أن $\vec{IE} + \vec{IF} = \vec{0}$ <u>الطريقة الأولى:</u> لدينا : $\vec{IE} + \vec{IF} = \vec{IA} + \vec{AE} + \vec{IA} + \vec{AF} = 2\vec{IA} + \frac{-1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AB} = 2\vec{IA} + \vec{AB} = 2\vec{IA} + \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ بالتالي للقطعتين $[EF]$ و $[AB]$ نفس المنتصف . <u>الطريقة الثانية:</u> باستعمال الخاصية المميزة للمرجح بالنسبة لـ $M = I$ المستعملة في السؤالين السابقين نجد أن: $\vec{IE} + \vec{IF} = \left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\right)\vec{IA} + \left(\frac{3}{2} + \frac{-1}{2}\right)\vec{IB} = \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ منه : $\vec{IF} = \frac{-1}{2}\vec{IA} + \frac{3}{2}\vec{IB}$ و $\vec{IE} = \frac{3}{2}\vec{IA} + \frac{-1}{2}\vec{IB}$ بالتالي للقطعتين $[EF]$ و $[AB]$ نفس المنتصف .		
الخاصية المميزة للمرجح مفيدة في إنشاء المرجح وفي كثير من البراهين.		



لدينا I مرشح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$
 إذن حسب الخاصية المميزة للمرّح:
 $\forall M \in (P) \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{MB}$
 نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

لدينا J مرشح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(C,3)$
 إذن حسب الخاصية المميزة للمرّح:
 $\forall M \in (P) \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{MA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{MC}$
 نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$

لدينا K مرشح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$
 إذن حسب الخاصية المميزة للمرّح:
 $\forall M \in (P) \overrightarrow{MK} = \frac{2}{5} \overrightarrow{MB} + \frac{3}{5} \overrightarrow{MC}$
 نأخذ: $M = A$ فنجد أن: $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5} \overrightarrow{BC}$

1

لدينا G مرشح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و I مرشح النقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$
 إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرشح النقط $(I,3)$ و $(C,3)$ أي أن G منتصف $[IC]$

2

بين أن المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G
 لدينا G مرشح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرشح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(C,3)$
 إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرشح النقط $(B,2)$ و $(J,4)$ إذن $G \in (BJ)$
 لدينا G مرشح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و K مرشح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$
 إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرشح النقط $(A,1)$ و $(K,5)$ إذن $G \in (AK)$
 و حسب السؤال السابق $G \in (IC)$
 بالتالي : المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

3

خاصية التجميعية مفيدة في كثير من البراهين حيث تكون كافية للبرهان عن الاستقامة لأن مرّح نقطتين تكون مستقيمة مع هتين النقطتين.

$\overrightarrow{DE} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ و $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$	
2	<p>لدينا $\overrightarrow{DE} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ منه : $-\overrightarrow{ED} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$: منه : E مرجح النقطتين $(D, -1)$ و $(C, 3)$</p>
1	<p>لدينا $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ منه : D مرجح النقطتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$</p>
3	<p>لبن أن النقطة C مرجح النظمة المترنة $\{(A, 2); (B, 1); (E, 6)\}$: $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 6\overrightarrow{CE} = \vec{0}$: لدينا E مرجح النقطتين $(D, -1)$ و $(C, 3)$: $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$: نأخذ: $M = C$ فنجد أن: $(1) \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ولدينا D مرجح النقطتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$: نأخذ: $M = C$ فنجد أن: $(2) \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ من (1) و (2) نستنتج أن: $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$: $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ أي $6\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$: أي $\overrightarrow{CE} = -\frac{2}{6}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$: $6\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$: بالتالي : $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 6\overrightarrow{CE} = \vec{0}$</p>
<p>♦ : يمكن أيضا استعمال علاقة شال باستعمال المعطيات مباشرة ، لكن الأمر يتطلب استعمال متساويات كثيرة، لذلك استعمال الخاصية المميزة يسمح باختصار الوقت.</p>	
4	<p>لبن أن النقط B و C و H مستقيمية . لدينا H مرجح النقطتين $(A, 1)$ و $(E, 3)$ إذن حسب خاصية الصمود H مرجح النقطتين المترنتين $(A, 2)$ و $(E, 6)$ و بما أن C مرجح : $(E, 6); (B, 1); (A, 2)$ فحسب خاصية التجميعية C مرجح : $(H, 8); (B, 1)$: بالتالي النقط B و C و H مستقيمية .</p>
<p>♦ : للبرهان على الاستقامة يمكن البرهان على أن إحدى النقط الثلاث مرجح باقي النقطتين. الشكل غير مطلوب ، لذلك لم يتم رسم أي شكل</p>	

$\{(C, 2); (B, 2); (A, -1)\}$ مرجح H و $[BC]$ منتصف O	
1	<p>لبن أن $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ لدينا : H مرجح $(C, 2); (B, 2); (A, -1)$ إذن $\forall M \in (P) \overrightarrow{MH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M = O$ فنجد أن: $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$: (لأن $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ لكون O منتصف $[BC]$)</p>
<p>♦ : لم يتم رسم الشكل لكونه لا يتضمن الجديد</p>	

لنبين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$ أي نبين أن : $\vec{OH} + \vec{OG} = \vec{0}$
لدينا G مركز ثقل المثلث ABC إذن G مرجح $(A,1); (B,1); (C,1)$
إذن : $\forall M \in (P) \vec{MG} = \frac{1}{3}\vec{MA} + \frac{1}{3}\vec{MB} + \frac{1}{3}\vec{MC}$ نأخذ : $M = O$ نجد :

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}\vec{OA}$$

بالتالي : $\vec{OH} + \vec{OG} = \frac{-1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OA} = \vec{0}$

2

تمرين 10

لدينا F مرجح النقطتين المترتبتين $(C,3)$ و $(D,-2)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح :

$$\forall M \in (P) \vec{MF} = \frac{3}{1}\vec{MC} + \frac{-2}{1}\vec{MD}$$

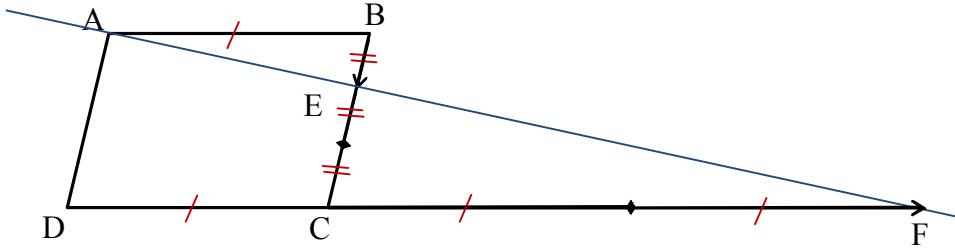
نأخذ : $M = D$ فنجد أن : $\vec{DF} = 3\vec{DC}$

لدينا E مرجح النقطتين المترتبتين $(C,1)$ و $(B,2)$
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح :

$$\forall M \in (P) \vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{MC} + \frac{2}{3}\vec{MB}$$

نأخذ : $M = B$ فنجد أن : $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

1



لنبين أن A مرجح النقطتين المترتبتين $(E,3)$ و $(F,-1)$ أي نبين : $3\vec{AE} - \vec{AF} = \vec{0}$

$$3\vec{AE} - \vec{AF} = 3(\vec{AB} + \vec{BE}) - (\vec{AD} + \vec{DF}) = 3\vec{AB} + 3\vec{BE} - \vec{AD} - \vec{DF} =$$

$$= 3\vec{DC} + 3 \times \frac{1}{3}\vec{BC} - \vec{BC} - 3\vec{DC}$$

لدينا :

$$= \vec{0}$$

2

3 نستنتج أن النقط A و E و F مستقيمة.

3

تمرين 11

<p>لدينا F مرجح النقطتين المترتبتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}$</p>	<p>لدينا E مرجح النقطتين المترتبتين $(C, -3)$ و $(B, 1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{-3}{-2} \overrightarrow{MC} + \frac{1}{-2} \overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M = B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$</p>
<p>لنبين أن $(CF) \parallel (AE)$ لدينا: $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}$ منه $\overrightarrow{BA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BF}$ منه $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{FB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{FC}$: بالتالي $(CF) \parallel (AE)$</p>	

تمرين 12

<p>لدينا F مركز ثقل المثلث ADC أي مرجح النقط $(A, 1)$ و $(D, 1)$ و $(C, 1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $(*) \forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MC}$</p>	<p>لدينا E مركز ثقل المثلث ABC أي مرجح النقط $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$</p>
<p>لنبين أن $(EF) \parallel (BD)$ نأخذ في المتساوية $(*)$: $M = E$ فنجد أن: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA})$ و بما أن E مرجح النقط $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ فإن: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$ أي: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DE}$ منه: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$ بالتالي: $(EF) \parallel (BD)$</p>	
<p>الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيجال الفكرة أحيانا. </p>	

• لدينا $\vec{AE} = -\frac{2}{5}\vec{AB}$ منه : $5\vec{AE} = -2\vec{AB}$ منه : $5\vec{AE} + 2\vec{AB} = \vec{0}$ منه : $5\vec{AE} + 2(\vec{AE} + \vec{EB}) = \vec{0}$
 منه : $5\vec{AE} + 2\vec{AE} + 2\vec{EB} = \vec{0}$ منه : $7\vec{AE} + 2\vec{EB} = \vec{0}$ منه : $-7\vec{EA} + 2\vec{EB} = \vec{0}$
 هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(A, -7)$ و $(B, 2)$

• لدينا I منتصف $[BC]$ إذن I مرجح النقطتين $(B, 1)$ و $(C, 1)$

• لدينا $\vec{CF} = \frac{7}{9}\vec{CA}$ منه $9\vec{CF} = 7\vec{CA}$ منه $9\vec{CF} - 7\vec{CA} = \vec{0}$ منه $9\vec{CF} - 7(\vec{CF} + \vec{FA}) = \vec{0}$
 منه : $9\vec{CF} - 7\vec{CF} - 7\vec{FA} = \vec{0}$ منه : $2\vec{CF} - 7\vec{FA} = \vec{0}$ منه : $-2\vec{FC} - 7\vec{FA} = \vec{0}$
 هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(C, -2)$ و $(A, -7)$ (أو أيضا $(C, 2)$ و $(A, 7)$ خاصية الصمود)

لنبين أن النقط E و I و F مستقيمة.

لدينا E مرجح $(A, -7)$ و $(B, 2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \vec{ME} = \frac{-7}{-5}\vec{MA} + \frac{2}{-5}\vec{MB}$

لدينا F مرجح $(A, 7)$ و $(C, 2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P) \vec{MF} = \frac{2}{9}\vec{MC} + \frac{7}{9}\vec{MA}$

2 نأخذ: $M = I$ فنجد أن: $\vec{IE} = \frac{7}{5}\vec{IA} - \frac{2}{5}\vec{IB}$ و $\vec{IF} = \frac{2}{9}\vec{IC} + \frac{7}{9}\vec{IA}$

ولدينا I منتصف $[BC]$ منه : $\vec{IC} = -\vec{IB}$ منه : $\vec{IF} = \frac{-2}{9}\vec{IB} + \frac{7}{9}\vec{IA}$

إذن : $9\vec{IF} = -2\vec{IB} + 7\vec{IA}$ و $5\vec{IE} = 7\vec{IA} - 2\vec{IB}$ منه : $9\vec{IF} = 5\vec{IE}$ أي $\vec{IF} = \frac{5}{9}\vec{IE}$

بالتالي : النقط E و I و F مستقيمة.

الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيصال الفكرة أحيانا.

$A(3, 4)$ و $B(0, 2)$ و $C(3, 2)$

1 لدينا E منتصف $[BC]$ منه : $\begin{cases} x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3}{2} \\ y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$ منه : $E\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

لدينا: G مرجح $(A, 1)$ و $(E, 2)$ منه : $\begin{cases} x_G = \frac{2x_E + x_A}{3} = \frac{3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{2y_E + y_A}{3} = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$ منه : $G\left(2; \frac{8}{3}\right)$

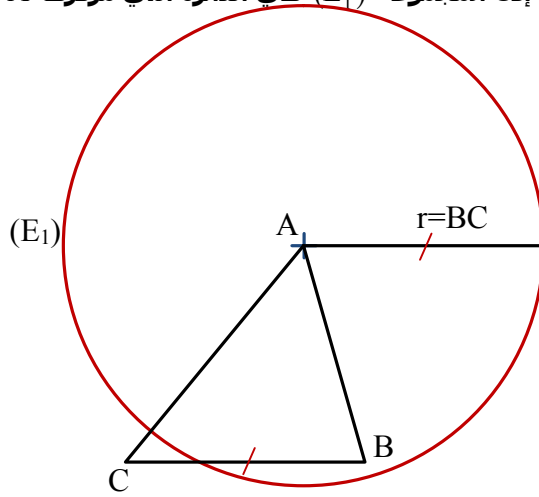
2 لدينا: $\vec{OE}\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ و $\vec{OG}\left(2; \frac{8}{3}\right)$ ولدينا : $\det(\vec{OG}, \vec{OE}) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{8}{3} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} = 4 - 4 = 0$

بالتالي : O و G و C مستقيمة.

تذكير: إحداثيات مرجح (A, α) و (B, β) و ... و (K, λ) هي : $\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \dots + \lambda x_K}{\alpha + \beta + \dots + \lambda} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \dots + \lambda y_K}{\alpha + \beta + \dots + \lambda} \end{cases}$

لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

لدينا : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ تعني : $AM = BC$ إذن المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها A و شعاعها $R = BC$

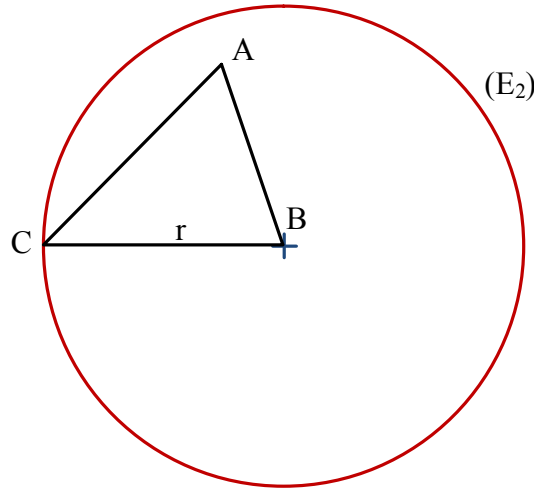


1

لنحدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|$

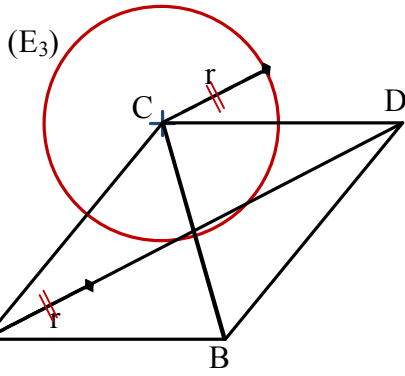
لدينا : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ منه : $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$ أي : $BM = BC$

بالتالي المجموعة (E_2) هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها $R = BC$



2

تمرين 15



لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|4\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (أي متوازي أضلاع)

3 منه : $\|4\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$ أي : $4CM = AD$ أي : $CM = \frac{AD}{4}$

بالتالي المجموعة (E_3) هي الدائرة التي مركزها C و شعاعها $R = \frac{AD}{4}$

تمرين 16

لنحدد (ζ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$

نعتبر النقطة G مركز النقط ($A,1$) و ($B,1$) و ($C,1$) (أي مركز ثقل المثلث ABC)

1 لدينا حسب الخاصية المميزة للمرحح $\forall M \in (P) 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

منه : $\|3\overrightarrow{MG}\| = 6$ أي $3MG = 6$ أي $MG = 2$

بالتالي (ζ) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = 2$

لنحدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

نعتبر النقطة I مركز النقط ($A,1$) و ($B,1$) (أي منتصف $[AB]$)

و النقطة J مركز النقط ($B,1$) و ($C,1$) (أي منتصف $[BC]$)

2 لدينا حسب الخاصية المميزة للمرحح $\forall M \in (P) 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ و $\forall M \in (P) 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

منه : $\|2\overrightarrow{MI}\| = \|2\overrightarrow{MJ}\|$ أي $2MI = 2MJ$ أي $MI = MJ$

بالتالي (Δ) هو واسط القطعة $[IJ]$

لنحدد (L) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$

نعتبر النقطة G مركز النقطتين ($A,1$) و ($B,3$)

3 لدينا حسب الخاصية المميزة للمرحح $\forall M \in (P) 4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

منه : $\|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}\|$ أي $\|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$ أي $4MG = \frac{BC}{2}$

بالتالي (L) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = \frac{BC}{2}$

❖ لم يتم رسم الأشكال نظرا لكوننا تطرقنا لها في التمرين السابق.

لا حظ أننا ستعمل المرحح لكي يتم تبسيط المجموع المتجهي داخل رمز المنظم، لكن وفي حال كان مجموع المعاملات منعزما (كما هو الحال في المثال الأخير فإنه يكون ممكنا تبسيط هذا التعبير دون استعمال المرحح)