

## المتتاليات

### القدرات المنتظرة

- توظيف الاستدلال بالترجع؛  
 التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛  
 التعرف على وضعيات لمتتاليات حسابية أو هندسية؛  
 التعرف على استخدام المتتاليات الحسابية والهندسية في حل مسائل.

### I- عموميات حول المتتاليات

#### 1- تعريف و مصطلحات

#### a/ أنشطة

1/ لاحظ ثم أتمم خمسة أعداد ملائمة لتسلسل كل لائحة من اللوائح التالية:

a- 1, 3, 5, 7, 9, 11, .....

b- 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, .....

c- -3, -3/2, -3/4, -3/8, -3/16, -3/32, .....

d- 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, .....

e- -2, 3, 1, 4, 5, 9, .....

- كل لائحة من اللوائح تسمى متتالية و الأعداد المكونة لكل لائحة تسمى حدود المتتالية
- نلاحظ أن لوائح أعلاه تسير بانتظام معين

اللائحة a هي الأعداد الفردية في ترتيب تصاعدي

اللائحة b هي أعداد على شكل  $\frac{1}{n}$  بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة c هي أعداد على شكل  $\frac{-3}{2^n}$  بتعويض n بعدد صحيح طبيعي

اللائحة d هي أعداد على شكل  $\frac{n}{n+1}$  بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة e هي أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحدين اللذين قبله وهكذا.....

2/ في كل لائحة من اللوائح a و b و c إذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ  $u_0$  و الثاني بـ  $u_1$  و الثالث بـ  $u_2$

و هكذا دواليك فإننا نحصل على اللائحة  $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$

أ/ ما رتبة  $u_8$  ب/ حدد قيمة  $u_8$

ج/ ما رتبة  $u_n$  ، حدد  $u_n$

-  $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$  تسمى حدود متتالية

- إذا كان الحد الأول هو  $u_0$  فإن رتبة  $u_0$  هي 1 ورتبة  $u_1$  هي 2 وهكذا..... رتبة  $u_n$  هي  $n+1$

ج- a/  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n+1$  /b  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n+1}$  /c  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3}{2^n}$

$u_n$  يسمى الحد العام للمتتالية

3/ في اللائحة d إذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ  $v_1$  و الثاني بـ  $v_2$  و الثالث بـ  $v_3$

و هكذا دواليك فإننا نحصل على اللائحة  $v_1, v_2, v_3, \dots$

ما رتبة  $v_n$  ، حدد  $v_n$

رتبة  $v_n$  هي  $n$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{n}{n+1}$

4/ حد صيغة التي تسير عليها اللائحة e

لاحظنا أن في اللائحة e أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد اللذين قبلهما وهكذا.....  
إذا اعتبرنا أن  $w_1$  ،  $w_2$  ،  $w_3$  ، ..... حدود متتالية الأثحة e فان  $w_3 = w_1 + w_2$  و  $w_4 = w_2 + w_3$  ...  
حيث  $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$   $n \in \mathbb{N}^*$

**ملاحظة:**

المتتاليات في a و b و c و d أعطينا حدها العام بصيغة صريحة أي لحساب أي حد نعوض n و نحصل على النتيجة أم في e أعطينا حدها العام بدلالة حدود للمتتالية أي لحساب حد يجب أن نرجع إلى حدين قبلهما

**/b تعريف**

ليكن  $n_0$  عددا صحيحا طبيعيا و  $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  جزء من  $\mathbb{N}$   
كل دالة من I نحو  $\mathbb{R}$  تسمى متتالية عددية

**اصطلاحات**

$u: I \rightarrow \mathbb{R}$  متتالية عددية

يرمز لصورة n بواسطة  $u_n$  عوض  $u(n)$ . العدد  $u_n$  يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.

يرمز للمتتالية بـ  $(u_n)_{n \in I}$  عوض u.

\*- إذا كان  $I = \mathbb{N}$  فإنه يرمز للمتتالية بـ  $(u_n)_{n \geq 0}$  أو  $(u_n)$

\*- إذا كان  $I = \mathbb{N}^*$  فإنه يرمز للمتتالية بـ  $(u_n)_{n \geq 1}$

\*- إذا كان  $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  فإنه يرمز للمتتالية أيضا بـ  $(u_n)_{n \geq n_0}$

**أمثلة**

نعتبر المتتاليات العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)_{n \geq 2}$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ :

$$\begin{cases} w_1 = -2 \\ w_{n+1} = 2w_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_n = 2n^2 - 3n \\ v_{n+1} = 2v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_n = (-2)^n + 3n \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات  $(u_n)$  و  $(v_n)_{n \geq 2}$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$

**2- تحديد متتالية**

تحدد المتتالية اذا علمت حدودها أو الوسيطة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها.  
و هناك عدة طرق منها على الخصوص:

**أ- المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة للحد العام.**

**أمثلة**

نعتبر المتتاليات العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ :

$$w_n = \frac{(-2)^n}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = a \quad \text{حيث } a \text{ عدد حقيقي} \quad \text{و} \quad u_n = 2n - 6$$

$(u_n)$  و  $(v_n)$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$  متتاليات محددة بالصيغة الصريحة

أحسب الحد الثالث لكل من المتتاليات  $(u_n)$  و  $(v_n)$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$

**ب - المتتالية الترجعية:** أي لحساب حد من حدودها نرجع لحدود أخرى

**أمثلة**

نعتبر المتتاليات العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ :

$$\begin{cases} w_3 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n - 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} v_0 = 2 & v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \end{cases} \quad n \geq 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} \end{cases} \quad n \geq 1$$

$(u_n)$  و  $(v_n)$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$  متتاليات ترجعية

/1 أحسب  $u_1$  ;  $u_2$  ;  $u_3$  ;  $v_2$  ;  $v_3$  ;  $w_2$  ;  $w_3$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{2n+1} \quad \text{بين بالترجع أن}$$

## II- المتتاليات المحدودة – المتتاليات الرتبة

### 1- المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة – المتتالية المحدودة

#### أنشطة

$$v_n = \frac{n+1}{2n+3} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{2}{3}n-1 \quad \text{حيث } (v_n) \text{ و } (u_n)$$

$$1/ \text{ أحسب } v_1 \text{ و } v_0 \text{ و } u_1 \text{ و } u_0$$

$$2/ \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1 \text{ و } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$$

لدينا  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$  نقول إن المتتالية  $(u_n)$  مصغورة بالعدد 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1$  نقول إن المتتالية  $(v_n)$  مكبورة بالعدد 1

#### تعريف

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي  $M$  بحيث  $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي  $m$  بحيث  $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  محدودة اذا وفقط اذا كانت  $(u_n)_{n \in I}$  مكبورة و مصغورة

ملاحظة  $(u_n)_{n \in I}$  محدودة  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad u_n = 2n-1$$

بين أن  $(u_n)$  مصغورة و  $(v_n)_{n \geq 1}$  مكبورة بالعدد 3 و  $(w_n)_{n \geq 1}$  محدودة.

### 2- المتتالية الرتبة

#### تعريف

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  تزايدية اذا وفقط اذا كان لكل  $n$  و  $m$  من  $I$  :  $n > m$  تستلزم  $u_n \geq u_m$

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  تزايدية قطعاً اذا وفقط اذا كان لكل  $n$  و  $m$  من  $I$  :  $n > m$  تستلزم  $u_n > u_m$

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  تناقصية اذا وفقط اذا كان لكل  $n$  و  $m$  من  $I$  :  $n > m$  تستلزم  $u_n \leq u_m$

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  تناقصية قطعاً اذا وفقط اذا كان لكل  $n$  و  $m$  من  $I$  :  $n > m$  تستلزم  $u_n < u_m$

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  ثابتة اذا وفقط اذا كان لكل  $n$  و  $m$  من  $I$  لدينا  $u_n = u_m$

#### أمثلة

أدرس رتبة المتتاليتين العدديتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  حيث  $u_n = 2n-1$  و  $v_n = -3n+5$

نشاط

برهن أن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية تزايدية  $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

#### خاصيات

لتكن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية حيث  $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n\}$

$\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$  متتالية تزايدية

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تزايدية قطعاً } (u_n)_{n \in I}$$

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تناقصية } (u_n)_{n \in I}$$

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تناقصية قطعاً } (u_n)_{n \in I}$$

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow \text{متتالية ثابتة } (u_n)_{n \in I}$$

### تمرين

نعتبر المتتاليات العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ :

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 1 \end{cases} \text{ و } v_n = \frac{2^n}{n} \text{ و } u_n = \frac{n}{n+1}$$

1- أدرس رتبة  $(u_n)$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$

2- أ- بين أن  $w_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- بين أن  $(w_n)_{n \geq 1}$  تزايدية .

### III- المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

#### A- المتتالية الحسابية

##### 1- تعريف

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي  $r$  بحيث  $u_{n+1} = u_n + r \quad \forall n \geq n_0$  العدد  $r$  يسمى أساس المتتالية .

##### أمثلة

نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  حيث  $u_n = -2n + 1$  و  $v_n = \frac{1}{n}$

بين أن  $(u_n)$  متتالية حسابية محددًا أساسها.

هل  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية حسابية؟

#### 2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

##### نشاط

$(u_n)_{n \geq p}$  حسابية أساسها  $r$  و حدها الأول  $u_p$

1/ بين بالترجع أن  $u_n = u_p + (n-p)r \quad \forall n \geq p$

2/ نضع  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$

أ- بين بالترجع أن  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ب- ما عدد حدود المجموع  $S_n$

ت- بين أن  $S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

##### خاصية

إذا كان  $(u_n)_{n \geq p}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فإن  $u_n = u_p + (n-p)r \quad \forall n \geq p$

- ملاحظة إذا كان  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فإن  $u_n = u_0 + nr \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فإن  $u_n = u_1 + (n-1)r \quad \forall n \geq 1$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq p}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فإن  $u_n = u_q + (n-q)r \quad \forall n \geq q \geq p$

##### خاصية

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية حسابية

إذا كان  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$  فان  $S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$  هو عدد حدود المجموع  $S_n$  و  $u_p$  هو الحد الأول للمجموع  $S_n$  و  $u_{n-1}$  هو الحد الأخير للمجموع  $S_n$

### ملاحظة

- إذا كان  $(u_n)$  متتالية حسابية فان  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية حسابية فان  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

### تمرين

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها 3 و حدها الأول  $u_0 = -2$

1 / أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$  و أحسب  $u_{200}$

2 / أحسب مجموع 100 حدا أولا للمتتالية

### تمرين

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حيث  $u_{50} = 20$  و  $u_{30} = -40$

1 / حدد أساس ثم الحد العام للمتتالية  $(u_n)$

2 / أحسب المجموع  $S = u_{15} + u_{16} + \dots + u_{54}$

### تمرين

أحسب  $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$

### تمرين

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad \begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- بين أن  $(v_n)$  متتالية ثابتة .

2- استنتج أن  $(u_n)$  متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$  . ثم أحسب  $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$  بدلالة  $n$  .

### B- المتتالية الهندسية

#### 1- تعريف

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي  $q$  بحيث  $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq n_0$  العدد  $q$  يسمى أساس المتتالية .

#### أمثلة

$(u_n)$  متتالية حيث  $u_n = 3(2)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية محددًا أساسها

#### تمرين

نعتبر المتتاليتين العدديتين  $(u_n)_{n \geq 1}$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$  و  $u_1 = 1$  و  $v_n = u_n - 2$

بين أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية محددًا أساسها

## 2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

### نشاط

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$

1/ بين بالترجع أن  $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

2/ نعتبر  $q \neq 1$  و  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$

أ- بين أن  $S_n - qS_n = u_p - u_n$

ب- استنتج أن  $S_n = u_p \left( \frac{1-q^{n-p}}{1-q} \right)$

### خاصية

إذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن  $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0} \quad \forall n \geq n_0$

ملاحظة - إذا كان  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن  $u_n = u_0 q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن  $u_n = u_1 q^{n-1} \quad \forall n \geq 1$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن  $u_n = u_p q^{n-p} \quad \forall n \geq p \geq n_0$

### أمثلة

\* لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $-\frac{1}{2}$  و حدها الأول  $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية  $(u_n)$  بدلالة  $n$

\* لتكن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها  $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية  $(v_n)$  بدلالة  $n$

### خاصية

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1

إذا كان  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$  فإن  $S_n = u_p \left( \frac{1-q^{n-p}}{1-q} \right)$

$n - p$  هو عدد حدود المجموع  $S_n$  و  $u_p$  هو الحد الأول للمجموع  $S_n$

### ملاحظة

- إذا كان  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1 فإن  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1 فإن  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

### حالة خاصة

إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها 1 فإن  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} = u_p (n - p)$

### تمرين

1/ لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $-\frac{1}{2}$  و حدها الأول  $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية  $(u_n)$  بدلالة  $n$

2/ لتكن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها  $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية  $(v_n)$  بدلالة  $n$

**تمرين**

أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n$

**تمرين**

نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بحيث:  $u_0 = -3$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4$  لكل  $n \in \mathbb{N}$

نضع  $v_n = u_n + 6$

1. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية وحدد أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$

2. احسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$

3. نضع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

احسب  $S_n$  بدلالة  $n$

---

---