

مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ في الحسابيات

القدرات المنتظرة

*- توظيف الزوجية وتفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

I) مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

1- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

نشاط

من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية
5 ، $\sqrt{3}$ ، $4+16$ ، $\frac{5}{2}$ ، $12-23$ ، $\frac{15}{3}$ ، $\sqrt{25}$ ، 2,15

تعريف

الأعداد 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 تسمى أعدادا صحيحة طبيعية و تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية نمرز لها بـ \mathbb{N}
نكتب $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5..... \rightarrow\}$

مصطلحات و ترميز

*- العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي المنعدم

- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة نمرز لها بالرمز \mathbb{N}^

$$\mathbb{N}^* = \{1;2;3;4;5..... \rightarrow\}$$

تمرين

أتمم بأحد الرمزین \in أو \notin

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \dots \mathbb{N} ; \sqrt{2} \dots \mathbb{N}^* ; 0 \dots \mathbb{N}^* ; -5 \dots \mathbb{N} ; 3 \dots \mathbb{N}^* ; \frac{24}{2} \dots \mathbb{N}$$

2- الأعداد الزوجية - الأعداد الفردية

أنشطة

1- أعط كل الأعداد الزوجية المحصورة بين 41 و 65

2- لنمرز لمجموعة الأعداد الزوجية بـ P و مجموعة الأعداد الفردية بـ I ،

أتمم بأحد الرمزین \in أو \notin

$$2\sqrt{3} \dots P ; 4 \times 17 \dots P ; 4 \times 17 \dots I ; 0 \dots I ; 0 \dots P ; 5 \times 13 \dots I$$

3- ليكن a و b عددين صحيحين زوجيين و c و d عددين صحيحين فرديين

حدد زوجية الأعداد التالية (هل الأعداد زوجية أم فردية) مع تعليل الجواب

$$a+c ; c+d ; a+b$$

تعريف

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد زوجي إذا فقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي

$$a = 2k \text{ حيث } k$$

نقول إن العدد الصحيح الطبيعي a عدد فردي إذا فقط كان يوجد عدد صحيح طبيعي k

$$a = 2k + 1 \text{ حيث } k$$

أمثلة

الأعداد 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 أعداد زوجية

الأعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 أعداد فردية

ملاحظات

*- كل عدد صحيح طبيعي هو إما عدد زوجي أو عدد فردي

*- مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي

مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي

مجموع عدد زوجي و عدد فردي هو عدد فردي

تمرين

1- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا

أدرس زوجية كل من $n(n+1)$ و $n+(n+1)+(n+2)$ و $4n^2 + 4n + 1$

2- ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m > n$

بين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

الحل

1- * n و $n+1$ عددان صحيحان طبيعيين متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي و التالي جداولهما زوجي إذن $n(n+1)$ زوجي
* لدينا $3(n+1) = (n+1) + (n+2) + (n+1)$ و التالي زوجية $(n+1) + (n+2) + (n+1)$ هي زوجية $n+1$
إذا كان n زوجيا فان $(n+1) + (n+2) + (n+1)$ فرديا
إذا كان n فرديا فان $(n+1) + (n+2) + (n+1)$ زوجيا
* لدينا $4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ و حيث أن $(2n^2 + 2n) \in \mathbb{N}$ فان $4n^2 + 4n + 1$ فردي

2- n و m عددان صحيحان طبيعيين حيث $m > n$
نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية
العدد $(m-n)$ يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا
* إذا كان $(m-n)$ زوجيا فانه يوجد k من \mathbb{N} حيث $m-n = 2k$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة
نحصل على $m+n = 2k + 2n = 2(k+n)$ وحيث أن $k+n \in \mathbb{N}$ فان $m+n$ زوجي
* إذا كان $(m-n)$ فرديا فانه يوجد k من \mathbb{N} حيث $m-n = 2k+1$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة
نحصل على $m+n = 2k + 2n + 1 = 2(k+n) + 1$ وحيث أن $k+n \in \mathbb{N}$ فان $m+n$ فرديا
إذن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

(II) - مضاعفات عدد - قواسم عدد

(A) مضاعفات عدد

1- أنشطة

نشاط 1

1- ضع الرمز \times في المكان المناسب

2210	211	999	121	33	75	50	24	
								مضاعف 2
								مضاعف 3
								مضاعف 5
								مضاعف 11

2- استخراج من بين أعداد السطر الأول المضاعفات المشتركة للعددين 2 و 3 ثم 3 و 11

نشاط 2

حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 ثم للعدد 9
استنتج المضاعفات المشتركة من بين هذه المضاعفات
ماذا تلاحظ
(اصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و 9 هو 18 . المضاعفات المشتركة للعددين 6 و 9 هي مضاعفات العدد 18)

نشاط 2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا
أ- تأكد $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$
ب- بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

الحل

ب- ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من \mathbb{N} حيث $n = 2k + 1$
لدينا $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ ومنه $n^2 - 1 = 4k(k+1)$
وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)
فانه يوجد k' من \mathbb{N} حيث $k(k+1) = 2k'$ و بالتالي $n^2 - 1 = 8k'$
إذن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8

2- تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم
نقول إن العدد a مضاعف للعدد b إذا فقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a = bk$

أمثلة

الأعداد 0 ، 5 ، 10 ، 15 ، 20 ، 25 ، 1775 مضاعفات للعدد 5
22 ليس مضاعف للعدد 4

3- * ليكن $b \in \mathbb{N}^*$

مضاعفات b هي الأعداد kb حيث $k \in \mathbb{N}$

* $0 \times k = 0$

خاصية

* لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ما لنهاية من المضاعفات
* للعدد 0 مضاعف وحيد هو 0

4- المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين
 a و b نرمز له بالرمز $PPCM(a; b)$

أمثلة $PPCM(6; 10) = 30$ ، $PPCM(4; 9) = 36$

(B) قواسم عدد

1- نشاط

حدد قواسم 90 ثم قواسم 126 ثم استنتج أكبر قاسم مشترك للعددين 90 و 126

2- تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين حيث b غير منعدم
نقول إن العدد b قاسم للعدد a إذا فقط إذا وجد عدد صحيح طبيعي k حيث $a = bk$

ملاحظة : العدد b قاسم للعدد a إذا فقط إذا العدد a مضاعف للعدد b
نقول أيضا العدد a قابل للقسمة على b

- كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم مخالفا لـ 1 له على الأقل قاسمان 1 و نفسه
- للعدد 1 قاسم وحيد هو نفسه
- جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير المنعدمة تقسم 0

3- القاسم المشترك الأكبر لعددين

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك لهما
نرمز له بالرمز $PGCD(a; b)$

مثال $PGCD(4; 9) = 1$ ، $PGCD(126; 90) = 18$

(III) الأعداد الأولية

1- تعريف

نسمي عددا أوليا كل عدد صحيح طبيعي له قاسمان بالضبط

أمثلة (حدد الأعداد الأولية الأصغر من 40)

الأعداد الأولية الأصغر من 40 هي 2 ، 3 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، 31 ، 37

2- التفكير إلى جداء عوامل أولية لعدد غير أولي

مبرهنة (مقبولة)

كل عدد صحيح طبيعي n ($n \geq 2$) هو عدد أولي أو جداء عوامل أولية

أمثلة

41 عدد أولي

72 عدد غير أولي و $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$

تعريف

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا غير أولي كتابة a على شكل جداء عوامل أولية تسمى "التفكيك إلى جداء عوامل أولية" للعدد a

أمثلة

فك الأعداد 24 ، 319 ، 1344 إلى جداء عوامل أولية
 $1344 = 4 \times 4 \times 4 \times 21 = 2^6 \times 3 \times 7$ $319 = 11 \times 29$ و $24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$

تقنية للتفكيك (نقلها)

مثال:		
1344	2	لتفكيك عدد صحيح طبيعي غير منعدم a نأخذ اصغر عدد أولي يقسم a و ننجز القسمة فنحصل على عدد b خارج القسمة فنأخذ اصغر عدد أولي يقسم b فنحصل على خارج القسمة و نتابع على هذا المنوال حتى نحصل على خارج يساوي 1.
672	2	
336	2	
168	2	
84	2	
42	2	
21	3	
7	7	
1		
إذن $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$		

3- خاصيات (نقلها)

خاصية 1

المضاعف المشترك الأصغر لعددتين هو جداء العوامل الأولية المشتركة و الغير المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أكبر أس.

خاصية 1

القاسم المشترك الأكبر لعددتين هو جداء العوامل الأولية المشتركة بين تفكيكي هذين العددين إلى جداء عوامل أولية. المرفوعة إلى أصغر أس.

ملاحظات $PPCM(a;a) = a$ ، $PPCM(a;1) = a$ ، $PGCD(a;a) = a$ ، $PGCD(a;1) = 1$

تمرين:

حدد $PPCM(35;121)$ ، $PGCD(35;121)$ ، $PPCM(84;216)$ ، $PGCD(84;216)$

إضافات

* **طريقة لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للعددتين a و b حيث $a \geq b$**
أحدد مضاعفات a ثم أتأكد بالتتابع ابتداء من أصغر مضاعف غير منعدم للعدد a هل هو مضاعف للعدد b فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث إن كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو المضاعف المشترك الأصغر للعددتين a و b .

* **طريقة لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددتين a و b حيث $a \geq b$**
أحدد قواسم العدد b ثم أتأكد بالتتابع تناقصيا ابتداء من أكبر قاسم للعدد b هل هو قاسم للعدد a فإذا كان الجواب لا ، أتابع البحث ان كان نعم ، أتوقف و العدد الذي حصلت فيه على هذا الجواب هو القاسم المشترك الأكبر للعددتين a و b .

* **طريقة لتحديد ما إذا كان العدد a أوليا أم لا**
نحدد أولا جميع الأعداد الأولية p حيث $p^2 \leq a$.
إذا كان a يقبل القسمة على أحد هذه الأعداد فان a غير أولي
إذا كان a لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فان a أولي