H í $AB =$ í $OA =$ š ô £ ò ß Ž ˜ H ß Ü ¸ ß ® ' ˜ Ì ç

: OB) ð à Ë A ð ß © î ä Ì Â ß Ø ´ ä ß •

OB • ´ £ ƒ -1

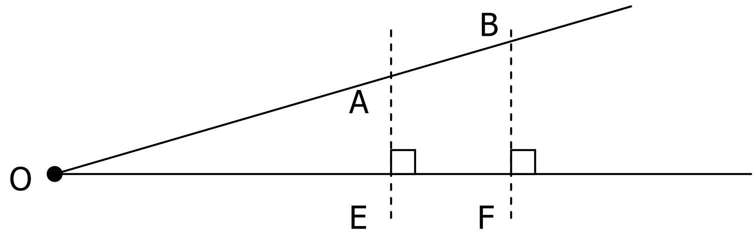
" ' ® Ø ã ô × ž ˜ è ˜ ³ â › $\left(\widehat{AOB}\right)$ • ´ £ ƒ / ƒ -2

$\widehat{AOB}$ " ó • ° ß Ž ô Ø ß

OH " Ó Ž ´ ä ß ˜ • è ˜ ³ / •

$\widehat{AOB}$) ž ˜ è ˜ ³ â › $\left(\widehat{AOB}\right)$ • ´ £ ƒ -3

$EF =$ í $AB =$ š ô ¤ ' ò ß Ž • H ß Ü ¸ ß ® ' ˜ Ì ç



$\widehat{AOE}$) ž ˜ è ˜ ³ â › $\left(\widehat{AOE}\right)$ • ´ £ ƒ

C í B í A ® ' ˜ Ì R ç Ž ì Ë Ž Ì í · O Ž ë ° â Û " ® ‹ • (©) æ Ü ˜ ß

" ô ³ ª è ì ß ó • ° à ± ß Ž ô ∝ š ô ¤ ' C) æ ã Â Ø M ç í B í A í

" Ÿ - ª ß Ž $\widehat{AOM}$

ò ß Ž ˜ ß ‹ í ª ß â • ä —1 •

$\widehat{AOM}$	AOB	$\widehat{AOC}$	$\widehat{AOB}$	$\widehat{AOA}$	" ó ° ® Û ß " • ó í • ° ß •
$\alpha°$					" Ÿ - ª Ž ß " ó ° Û ® ' ã ß • ß Ž ô ×
l					" Ä ' — ® â ß ª • è ì ß ± î Ø ß Ý • î Ã Ž ì '

ò ß • î ˜ ð ß à • Ë $\frac{\pi}{}R$ í $\frac{\pi}{}R$ í $\frac{\pi}{}R$ í πR " ' ³ Ž è ˜ ã ° í ° í ° í ° å ƒ æ ô -2

R í π í α " ß û l ª ' © ª £ -3

. R î ë $[AM]$ " ô ³ ª è ì ß ± î Ø ß Ý • î Ã š ô £ C) æ ã " Ä Ø M ç æ Ü ˜ ß -4

. ” Ÿ - ª ß Ž $\widehat{IOM}$ ” ó ° Û ® ãß ‰ ß Ž ô β © ª £

. å Ž ó © í • ® ß Ð í ß ” Ÿ - ª ß ë • • ª £ í ™ ü Ù Ž è Ž í ° ß Ž ô Ø ß

. R Ž ì ß î ” Ã ® Ž • ³ ¤ × ® ¼ ¤ R Ž ì Ë Ž Ì “ · ® ‹ ò Ó ì ” ó ° Û ” ® ã ± Ž ô × ë å Ž ó © • ® ß •
rad í frd ð Ž ì ß ã ® ç

(© • ® Ð ã à ß gr) πrd = gr = °

$\frac{x}{\pi} = \frac{y}{} = \frac{z}{}$ å Ž ó © • ® ß Ž ‘ ì ³ Ž ô × í ” Ÿ - ª ß Ž ‘ ì ³ Ž ô × í å Ž ó © • ® í ß ± Ž ô × å Ž Û « ‡

. é ® ¼ ò ˜ ß ” ó ° Û ® ã ß ‰ ß Ž ô × ë ” ô ³ ª è ë ± î × ± Ž ô ×

. αR î ë ± î Ø ß é • ¬ ë Ý î Ã å Ž Ó R Ž ì Ë Ž Ì “ · ® ‹ ò Ó ì å Ž ó © ” • ® ß Ž ë ± î × ± Ž ô × å Ž Û « ‡

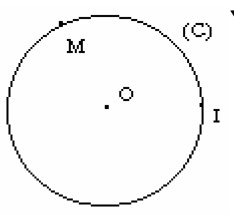
. Ž ë ® ½ ò ¤ ˜ ß ” • ó ° Û ® ã ß • ± Ž ô × ë 1 Ž ì Ë Ž Ì “ · ® ‹ ò Ó ì ” ô ³ ª è ë ± î × Ý î Ã

ò ß Ž ˜ ß í ª ß â • ä — •

°	°	°		°	” Ÿ - ª ß ” Ž ‘ í ± Ž ô ×
			$\frac{\pi}{}$		å Ž ó © ® ß Ž ‘ ì ³ Ž ô ×

® ä í A é ° Û ® ã ß “ ® • ª ß (C) ® ’ ˜ Ì ç $AB = cm$ š ô £ É ü ¿ û ñ í Ž ´ ˜ ã Ž œ à ABC ã æ Ü ô ß

$\widehat{BAC}$ ” ó ° Û ® ã ß ß Ž - ‘ î ¼ ä ß ” ô ³ ª è ì ß í Ø ß Ý î Ã • ´ £ f . B æ ã



. (C) æ ã ” Ä Ø ç I í R Ž ì Ë Ž Ì í · O Ž è ° Û ® ã ® ‹ • (©) æ Ü ˜ ß

. æ ô ô ¤ è Ž ã Ž f è ´ Ô Ž ç ª Ÿ î î ß) Ý î £ - í ª ë ß æ ã Ö à Ä å ç Ž ç f î ß

(• ® · Ž í) Ž ’ Ÿ î ð ¤ è ã æ ô ô ¤ è ª ã ß Ž ô ˜ î § • (C) ‘ ® ‹ • ê ß Ÿ î

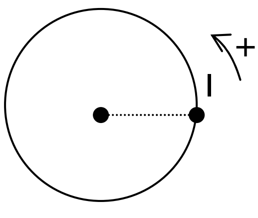
.(® · Ž ’ ® ô í) Ž ß Ž ð ¤ è ã ® § õ í •

. ” Ë Ž ´ ß • - Ž Ø ” Ë Û ® ª Û Ž Ì ä ß ¤ è ä ß • Ÿ î ä ß ð ¤ è ä ß § „ ç © Ž Ë

. C) “ ® ‹ • Þ ß • f ä ´ — I ” Ä Ø è ß •

. ê Ÿ î ã î ˜ ´ ä ß å ‡ Ý î Ø Ž ç è ç ª Ð î Ž ì ô Ÿ î î — ´ ä ß ® ‹ • Ê © ä ß Ÿ î Ž ã ª è Ë

. Ž ’ Ÿ î Ž ì ô Ÿ ” î ì Ÿ î ã Þ » f ” Ä Ø è © í 1 Ž ì Ë Ž Ì “ · ® ‹ ò ” ô œ à ‘ ® ä ß ª ß •



ñ © î ä Ì ß î • ¤ ä ß Ó I Ý î ¼ Ó $ô £]-\pi\ \pi]$ Ý Ž ä ß • ˜ Ì I ç Ž ì à » ý œ à ® ‹ ã (©) æ Ü ß ˜

. “ ® ‹ • É ß Ž • Ì · f ‘ ® • ª Â ô ¤ ã £ . OI) ð à Ë

Ö ’ Ä è $]-\pi\ \pi]$ æ ã α © ª Þ Û å f Æ £ ü (C) ‘ ® ‹ • ð ã Ë $]-\pi\ \pi]$ Ý Ž ä à ß à œ ä ” ä Ä Ø Ž è Ô Ô ß

$]-\pi\ \pi]$ æ ã α ª ô £ © Ë Þ œ ä C) æ ã M ” Ä Ø ç Û í C) æ ã M “ ª ô £ ’ í Ä Ø ç ã

M … α

. I … (C) …

$]-\pi;\pi]$ … α … (C) … M

. (C) … M … $]-\pi;\pi]$ … α

M … α

… $|\alpha|$ … $\widehat{IOM}$

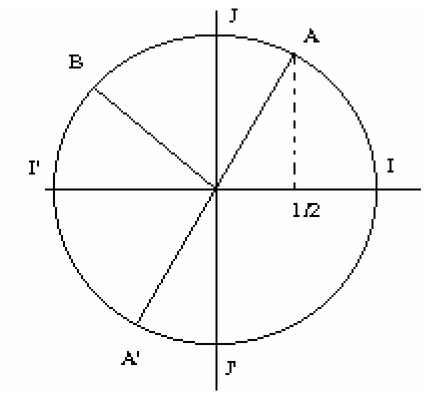
C , B , A … $f.I$ … (C_f)

, $\frac{\pi}{}$, $\frac{\pi}{}$ … H , G , F , E , D

… $-\frac{\pi}{}$, $-\frac{\pi}{}$, $-\frac{\pi}{}$, $-\frac{\pi}{}$, $\frac{\pi}{}$, $\frac{\pi}{}$

… (C)

… B; A'; A; J'; J; I'; I …



(Δ) … D I E … (C) …

. (OI) (Δ) …

. α … (C) … M …

… M …

(C) …

M …

…

$\alpha-\pi$ $\alpha-\pi$ α $\alpha+\pi$ $\alpha+\pi$

M …

$k \in \mathbb{Z}$ … $\alpha+k\pi$ …

α … (C_f) … M …

…

$\mathbb{Z}$ … $\alpha+k\pi$ …

.M …

$-\frac{\pi}{}$ í $\frac{\pi}{}$ æ ô ô ´ ô æ®ðßô•è ¤ æè ä ß î ¼ Ó ‹ B • í A æ ôÃ˜Ø è"äôß ¤ è ä ß » Ž Ó ©÷ª £

ò ß • î ˜ðßà•Ë

. I Ž ì à » þ œ à ® ‹ã (©)

M Š ¸ ç ƒ. M " Ä Ø è è ß ¤ è ã î ¼ Ó $\frac{\pi}{}$ ® ' ˜ Ì ç

ò ´ ô ‹ ® ß è ¤ è ä Žß ì• ß î ¼ α Ó æ Ü ô. ß Ž ì à » C) " ô œ à ® ‹ã æ ©ã" Ä Ø ç M æ Ü ˜ ß

$x - y = \lambda\pi$ š ô ¤ $\mathbb{Z}$ æ ã λ ® ¼ èª Ÿ î ó ê ç M Ó Ä Ø è à ß ô è æ è ô ß î ¼ Ó x ƒ å Ž Û « æ ô '

$x - y = \lambda\pi$ š ô ¤ $\mathbb{Z}$ æ ã λ ® ¼ èª Ÿ î ê ç Ó M " Ä Ø è à ß ô è æ è ô ß î ¼ Ó x ƒ å Ž Û « ‡

. π ª ó © y ® ñ ' í Ž ´ x ƒ ® Ó x ç ≡ y $[\pi]$ • ˜ Ü ç

Þ Ü · ð à Ë • ˜ Ü M " Ä Ø è"äôß ¤ è ä ß » Ž Ó ê ô ä Ž Ó " Ä Ø è à è ß ¤ è ã î ¼ x Ó ƒ å Ž Û « ‡

. k $\mathbb{Z}$ š ô £ $x + k\pi$

$\alpha = \frac{-\pi}{}$ " ô è ¤ è ä ß ô » Ž Óª £ ƒ ‡ ò ˜ ß" • Ä Ø à ß ô ‹ ® ò è ¤ è ä ß î ¼ Ó © ª £

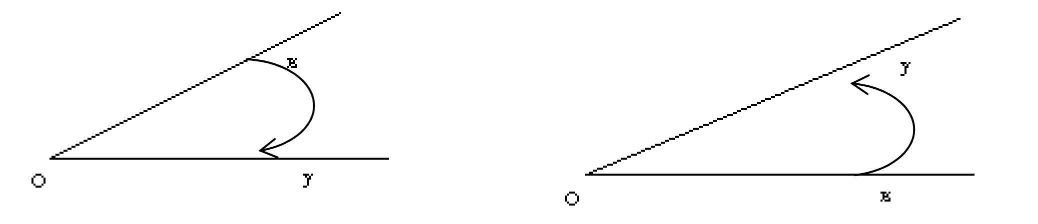
ò ë ò ß • î ˜ðßà•Ë" ô è ¤ è ä ß à • ô » ò Ž Ó ƒ B A Â Ø è" ß • œ à ' ® ä ß ð ß Ë Þ œ ã

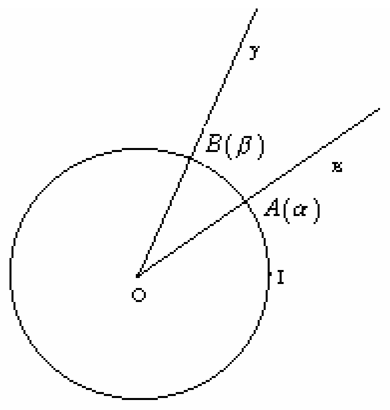
$\frac{-\pi}{}$ $\frac{\pi}{}$ π

. k $\mathbb{Z}$ š ô £ $-\frac{\pi}{} + \frac{k\pi}{}$ " ô è ¤ è ä ß à • ô » ò Ž Ó ƒ M_k Â Ø è" ô œ à ' ® ä ß ð ß Ë Š ¸ ç ƒ

Þ » ÷ • ² Ô ç Ž ä ì ß ô Ø ˜ ´ ã Ô ¼ ç $[Oy)$ í $[Ox)$ ® ˜ Ì ç Ÿ î ä ß • ˜ ´ ä ß ò Ó

$(\widehat{Ox, Oy})$ ã ® Ž Ž ß ã ® ô Ø ã ò Ô ¼ è ß Ÿ î ã" ó ï • © ª ¤ $([Ox), [Oy))$ • í ° ß •





C) í ì â ô Ø ˜ ´ ã Ô ¼ è ß Ÿ î ã" ó í • $(\widehat{Ox, Oy})$ æ Ü ˜ ß

ò Ô ¼ ç C) Ê Ã Ž Ø ˜ Ä Ø ç í A ì O Ž ë ° Û ® ô ã œ à ® ‹ã ©

ò ß • î ˜ðßà•Ë $[Oy)$ í $[Ox)$ â ô Ø ˜ ´ ã

. ò ß • î ˜ ß à Ë B í A æ ô ˜ Ä Ø è à ß è æ è ô ß î ¼ β Ó α æ Ü ô ß

. $(\widehat{Ox, Oy})$ " ì Ÿ î ä ß • ° Ž ß Ž ð ä ´ ó $\beta - \alpha$ © ª Ì ß •

k $\mathbb{Z}$ š ô £ $\beta - \alpha + k\pi$ Þ Ü ¸ ß ð à Ë • ˜ Ü ô Ø ô Ø Ë Þ Û

. $(\widehat{Ox, Oy})$ " ì Ÿ î ä ß" • ° Ž ß Ž ð ä ´ ó

$(\widehat{Ox, Oy}) = \beta - \alpha + k\pi$ k $\mathbb{Z}$ • ˜ Ü ç $(\widehat{Ox, Oy})$ ° ã ® ß Ž Oy) " ó ß • Ž ³ Ž ô Ø ã ß ® ç

$(\widehat{Ox, Oy}) \equiv \beta - \alpha$ $[\pi]$ Ž À ó ˜ ƒ Ü ç

± Ž ô Øð ßä • ´ ó $]-\pi\ \pi]$ Ý Ž äßß Þ ä ˜ è ºó £ ± Ž ô å ô Ø ˜ ´ ãÔ ¼ è ß Ÿ î ã' ó í • Þ Ü ß
. " ì Ÿ î ä ß ó í • ¬ è ß ì ß ´ ô ‹ ® ß •

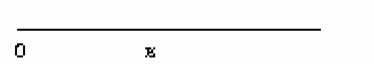
. $(\widehat{Ox\ Oy})$ " ó • ° à ± Ž ô $k\in\mathbb{Z}$ š ô £ $\theta+k\pi$ å Ž $(\widehat{Ox\ Oy})$ " ì Ÿ î ä ß ó í • ° Ð Ž ß θ å Ž Û « ‡

$\alpha-\beta\equiv\ \ \pi$ å Ž $(\widehat{Ox\ Oy})$ " ì Ÿ î ä ß ó • ° à ß ô ³ Ž β α å Ž Û « ‡

$k\in\mathbb{Z}$ $\alpha-\beta=k\pi)$ ñ ƒ

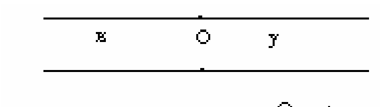
ò ë M " Ä Ø è" à ß ¤ è ß » Ž Ó Ž Ø Ž ë ° Û í ® ã Ž ì à » Þ œ à ® ‹ ã © ã' Ä Ø M – ç Ž Û « ‡
ò ´ ô ‹ ® ± Ž • ô Ø í ß M ð ß ´ ô ‹ ® ß ¤ à ß Ý î ¼ Ó û í $(\widehat{OI\ OM})$ " ì Ÿ î ä ß ó í • ³ Ž ³ Ž ô ×
$(\widehat{OI\ OM})$ " ì Ÿ î ä ß ó í • ß à

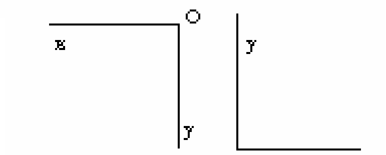
. $(\widehat{xOy})$ ' ô ³ ª è ì ß ó ° ß ± Ž ô ë $(\widehat{Ox\ Oy})$ ' ì Ÿ î ä ß ó • ° à ß ô ‹ ® ß ± Ž ô Ø " à ß à Ä ä ß ô • Ø * ß •



$(\widehat{Ox\ Ox})\equiv\ \ [\ \pi]$

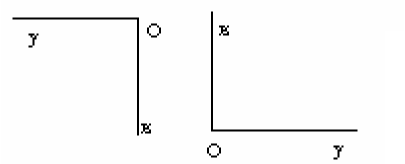
$(\widehat{Oy\ Ox})\equiv\pi\ \ [\ \pi]$ $(\widehat{Ox\ Oy})\equiv\pi\ \ [\ \pi]$





. $(\widehat{Ox\ Oy})\equiv\frac{\pi}{\ }\ [\ \pi\ ]$

" ' Ÿ î ã ä ‹ Ž' ó í • $(\widehat{Ox\ Oy})$ " ó • ° ß •



. $(\widehat{Ox\ Oy})\equiv-\frac{\pi}{\ }\ [\ \pi\ ]$

. " ' ß Ž ³ ä ‹ Ž' ó í • $(\widehat{Ox\ Oy})$ " ó í • ° ß •

$\frac{\pi}{\ }$ $\frac{-\ \ \pi}{\ }$ $\frac{\ \ \pi}{\ }$ " ó í • ² Ô ç • Ž ³ Ž ô Þ œ ä'- ß Ž ˜ Ž ³ Ž ô Ø ß æ ô 1

$-\frac{\pi}{\ }$ $\frac{\pi}{\ }$ $-\pi$ π • Ž ³ Ž ô Ø ß Ž ì ³ Ž ô ‹ Ÿ î ã' ó í • ð ß ô ‹ ® ß ± Ž ô Ø í ß Ž 2

. $\frac{-\ \ \pi}{\ }$ Ž ì ³ Ž ô $(\widehat{Ox\ Oy})$ " ì Ÿ î ã' ó í • Š ¸ ç ƒ 3

$(\widehat{AB\ AC})\equiv\frac{\pi}{\ }\ [\ \pi\ ]$ § ô £ É ü ¿ ÷ ñ í Ž ´ ˜ ã ß à œ ä ABC Š ¸ ç ƒ

å Ž Þ » ÷ ² Ô ç Ž ì ß ô Ø ˜ ´ ã Ž ¼ " ç ü › $[Oz)$ í $[Oy)$ í $[Ox)$ ç Ž Û « ‡
$(\widehat{Ox\ Oy})+(\widehat{Oy\ Oz})\equiv(\widehat{Ox\ Oz})\ \ [\ \pi]$

$(\widehat{Ox\ Oy})\equiv-(\widehat{Oy\ Ox})\ \ [\ \pi]$ å Ž ô Ø ˜ ´ ã Ô ¼ $[Oy)$ í $[Ox)$ å Ž Û « * •
$(\widehat{Ox\ Oy})\equiv(\widehat{Ox\ Oz})\ \ [\ \pi]$ Ö Ø ¤ â ô Ø ˜ ´ ã Ž ¼ " ç ü › $[Oz)$ í $[Oy)$ í $[Ox)$ ç Ž Û « * •
. å Ž Ø ' Ä â è ô ã Ø ˜ ´ ã Ô ¼ $[Oy)$ í $[Ox)$ å Ž Ó

$[Ox)$

$.\ \left(\overline{Ox\ Oy}\right) \equiv \alpha \quad [\pi] \quad [Oy)$

$\vec{v}$ $\vec{u}$

$[Oy)$ $[Ox)$

$.\vec{v}$ $\vec{u}$

$\left(\widehat{Ox\ Oy}\right)$ $\left(\vec{u}\ \vec{v}\right)$

$.\ \left(\widehat{\vec{u}\ \vec{v}}\right)$

$\left(\widehat{\vec{u}\ \vec{v}}\right)$

$.\ \left(\widehat{Ox\ Oy}\right)$

$\vec{w}$ $\vec{v}$ $\vec{u}$

$$\left(\overline{\vec{u}\ \vec{v}}\right) + \left(\overline{\vec{v}\ \vec{w}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{u}\ \vec{w}}\right) \quad [\pi]$$

$\left(\overline{\vec{u}\ \vec{v}}\right) \equiv -\left(\overline{\vec{u}\ \vec{v}}\right) \quad [\pi]$ $\vec{v}$ $\vec{u}$

$\left(\overline{\vec{u}\ \vec{v}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{u}\ \vec{w}}\right) \quad [\pi]$ $\vec{w}$ $\vec{v}$ $\vec{u}$

$\vec{w}$ $\vec{v}$

$(\mathscr{C})$ φ

$F\ \left(-\dfrac{\pi}{\ }\right)$ $E\ \left(\dfrac{\pi}{\ }\right)$ $B\ \left(\dfrac{\pi}{\ }\right)$ $A\ (\pi)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OE}\ \overrightarrow{OF}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OE}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}\ \overrightarrow{OA}}\right)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OA}}\right)$

$.\ I$ φ $(\mathscr{C})$

$\left(\widehat{OI\ OJ}\right)$ $(\mathscr{C})$ I

$\left(O\ \overrightarrow{OI}\ \overrightarrow{OJ}\right)$

$.\ (\mathscr{C})$

$.\ \left(\widehat{OI\ OJ}\right)$ $(\mathscr{C})$ I

$\left(O\ \overrightarrow{OI}\ \overrightarrow{OJ}\right)$

$.\ (\mathscr{C})$

ª ã Ž ì ˜ â ä ß • ä ß • $\overrightarrow{OI}$ $\overrightarrow{OJ}$) í ” ô œ â ® ‹ ã (©) æ Ü ˜ ß

C) æ ã ’ Ä Ø ç M æ Ü ˜ ß ì Â ’ — ® ä È ß ä ä ß •

M ð ß © î ä Ì Â Ø ´ ä ß • ® ’ ˜ Ì ç ì Ž ô è ¤ ë ã ¼ Ó f í

M ð ß © î ä Ì Â Ø ´ ä ß • í OI) ð à Ë

(OJ) ð à Ë

O $\overrightarrow{OI}$ $\overrightarrow{OJ}$) â à Ì ä ß Ó M ” Ä Ø è Ý ß ¼ Ó Ø ô Ø © ß Ì ß •

x ð ê ß ã ® ç ò Ø ô Ø © ß Ì ß Ž ä ô Ÿ ð ä ´ ó

O $\overrightarrow{OI}$ $\overrightarrow{OJ}$) â à Ì ä ß Ó M ” Ä Ø è ß — ò Ø ô Ø © ß Ì ß •

x ð ê ß ã ® ç x ò Ø ô Ø © ß Ì ß • ô Ÿ ð ä ´ ó

. P) ” Ä Ø è ß • ª è Ë C) ð ß Ž ä ä ß • æ Ü ð ß

ñ f Δ í OM) Ê Ã Ž ’ Ä Ø ç T æ Ü ˜ ß

$k \in \mathbb{Z}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

ð ä ´ ó I P) â à Ì ä ß Ó T Ý î ¼ Ó ð Ø ô Ø © ß Ì ß •

. x ð ê ß ã ® ç ò Ø ô Ø © ß Ì ß Ç

$M(\cos x \quad \sin x)$ å Ž Ó ” Ä Ø è ß ¤ è ã î ¼ Ó f å Ž Û « ‡

ð Ž ì ß ã ® ó Ž ì Ô ó ® ì £ å Ž ä ˜ ß Ÿ ” ß • ð ä ´ — $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \cos x\end{array}$ ” ß • ª ß •

ð Ž ì ß ã ® ó Ž ì Ô ó ® ì £ ô ß ” ß • ð ä ´ — $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin x\end{array}$ ” ß • ª ß •

ð Ž ì ß ã ® ó $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ Ž ì Ô ó ® ì £ Þ È ß ” ß • ð ä ´ — $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \tan x\end{array}$ ” ß • ª ß •

[II'] ” Ì Ä Ø ß ß ò ä ˜ è C — ” Ä Ø è ß ò ¤ è ã Ž ì ß î ¼ Ó C) æ ã ’ Ä Ø ç M Ê ¿ í å Ž Û ä Ô ð Û

I) $I'(-1 \; 0)$ J) $J'(0 \; -1)$ J) š ô £ [JJ'] ð ß ò ä ˜ è S — í

$-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $x \in \mathbb{R}$ Þ Ü ß

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $x \in \mathbb{R}$ Þ Ü ß

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$ Þ Ü ß

² Ô è ß ô è ¤ Þ ã ž Ó ì f $k \in \mathbb{Z}$ š ô £ $x + 2k\pi$ • ˜ Ü ò ˜ ß ” ô Ø ô Ø © ß Ë Ê ô ä Ÿ å f â à Ì ç

M ” Ä Ø è ß •

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$; $x \in \mathbb{R}$ Þ Ü ß

x î ë T Ý î ð ð Ž ¼ Ó M ß $x + k\pi$) – ç Ž Û ä ì ã

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$ Þ Ü ß

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$ Þ Ü ß

ð à ËÞ ¼ ¤'çô œ à đœ®ä ‹ß•Èß•Ç î-*'

$x \quad \mathbb{R} \quad$ Þ Ü ß $\quad -x) = \quad x \qquad (-x) = - \quad x$ ü

. " ó © ® Ó " ß • ªåß*f*• " ô Ÿ í ¯ " ß • ªåß•Ž è ß•î Øœæ Ë ® ' Ì ç

$x \quad \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{} + k\pi \; k \quad \mathbb{Z}$ Þ Û $\qquad -x) = - \quad x$ ü

. " ó © ® Ó " ß ª ßå••Ž êŒß • ¬ ëæ Ë® ' Ì ç

$x \quad \mathbb{R}$ Þ Ü ß $\quad \pi - x) = \quad x \qquad cos \quad \pi - x) = - \quad x$ ü

$x \quad \mathbb{R}$ Þ Ü ß $\quad \pi + x) = - \quad x \qquad cos \quad \pi + x) = - \quad x$ ü

$x \quad \mathbb{R}$ Þ Ü ß $\quad \frac{\pi}{} - x \quad = \quad x \qquad cos \; \frac{\pi}{} - x \quad = \quad x$ ü

$x \quad \mathbb{R}$ Þ Ü ß $\quad \frac{\pi}{} + x \quad = \quad x \qquad cos \; \frac{\pi}{} + x \quad = - \quad x$ ü

x	0	$\frac{\pi}{}$	$\frac{\pi}{}$	$\frac{\pi}{}$	$\frac{\pi}{}$	$\frac{\pi}{}$	$\frac{\pi}{}$	$\frac{\pi}{}$	π
sinx	0	$\frac{}{}$	$\frac{\sqrt{}}{}$	$\frac{\sqrt{}}{}$	1	$\frac{\sqrt{}}{}$	$\frac{\sqrt{}}{}$	$\frac{}{}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{}}{}$	$\frac{\sqrt{}}{}$	$\frac{}{}$	0	-$\frac{}{}$	-$\frac{\sqrt{}}{}$	-$\frac{\sqrt{}}{}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{}}{}$	1	$\sqrt{}$	® ô Ï Ñ ® Ì ã	-$\sqrt{}$	-1	-$\frac{\sqrt{}}{}$	0

$\frac{\pi}{} \qquad \frac{- \; \pi}{} \qquad \frac{\pi}{} \qquad \frac{- \; \pi}{}$ • ´ £ *f*

$+ \quad \frac{\pi}{} \; + \; \frac{\pi}{} + \quad + \quad \frac{\pi}{}$ © ª £ *f*

$\frac{\pi}{} + x \quad + \quad \frac{\pi}{} - x \quad + \quad (\pi + x \quad -) \quad (\pi - x)$ Â ´ ' - •

$-\frac{\pi}{}$ í $\frac{\pi}{}$ ® Ì ç ì $(O\ \vec{i}\ \vec{j})$ ® ·Žã â È è äªãŽ ˜ ãâ à ã ð ß‡• î ´ è ã ï î ˜ ´ ã ò Ó

. $(\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{-\ \pi}{}$ $[\ \pi\ ]$ § ô£ ” Ä Ø Ç æ Ü. ˜ ß B í A æ ô ˜ Ä ßØ æ ô ô è ß æ ô ¼ É •

B í A æ ô ˜ Ä ß Ø æ ô ´ ô ‹ ® ß è ¤ è æ ô ¼ É • © ª £-1

$\overline{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}})$ © ª £ â › $\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}})$ ò ´ ô ‹ ® ß Ž ô Ø © ª £-2

$\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OB}})$ ò ´ ô ‹ ® ± Ž ô Ø © ª £-3

” ô à ß à ® • ß ð à Ë C í B í A Â Ø ß Þ æ-4

$$A = \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{}$$ • ´ £ f -1

$$B = \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{}$$

$\frac{\pi}{}$ í $\frac{\pi}{}$ í $\frac{\pi}{}$ © ª £ $\frac{\pi}{} = \sqrt{\ } -$ å f Ž ä à Ë-2

$$C = \frac{\pi}{} + x \quad (\pi - x) + \frac{\pi}{} - x \quad (\pi + x)$$ Â ´ ‘ -1

$x + \quad x + \quad x \quad x =$ å f æ ô-2

B í A æ ô Ä Ø ß æ ô ô ® æ ô ô è ¤ æ ß ¼ É • © ª ç-1

$\frac{\pi}{}$ $]-\pi\ \pi\ ]$ š ô£ $\frac{\pi}{} = \times\ \pi + \frac{\pi}{}$ í A $\frac{\pi}{}$ Ž è ó ª ß

A ” Ä Ø è à ´ ß ô ‹ ® ß è ¤ ß Ý î ¼ É • $\frac{\pi}{}$ å « ‡

$\frac{\pi}{}$ $]-\pi\ \pi\ ]$ § ô £ $-\frac{\pi}{} = \times - \ \pi + \frac{\pi}{}$ í B $-\frac{\pi}{}$ Ž è ó ª ß

B ” Ä Ø è à ´ ß ô ‹ ® ß è ¤ ß Ý î ¼ É • $\frac{\pi}{}$ å « ‡

$\overline{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}})$ © ª ç â › $\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}})$ ò ´ ô ‹ ® ± Ž ô Ø © ª ç-2

$\frac{\pi}{}$ $]-\pi\ \pi\ ]$ $\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{} - \frac{\pi}{} + k\pi = \frac{\pi}{} + k\pi$

$\overline{(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{} = \frac{\sqrt{\ }}{}$ ê è ã í $\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}})$ ò ´ ô ® • ß ± Ž ô Ø $\frac{\pi}{}$ ß å « ‡

$\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OB}})$ ò ´ ô ® ß ± • Ž ô Ø © ß ª ç-3

$\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{-\ \pi}{}$ $[\ \pi\ ]$ Ž è ó ª ß

Ž ê ß Ý Ž ” × ü Ë • ´ £

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OB}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OA}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}\right)+k\pi$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OB}}\right)=-\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}\right)+k\pi$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OB}}\right)=-\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+k\pi$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\pi}{}+k\pi$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\pi}{}+\pi+k\pi=\frac{\pi}{}+(\ +k)\pi$$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OC}\ \overrightarrow{OB}}\right)$ ò´ ô‹ß®±Žô Øõßëë $\frac{\pi}{}$ åŽÕ $\frac{\pi}{}$ $]-\pi\ \pi]$ §ô£í

”ôœàœßåá®ª‹ßõð àË C í B í A Â ØŒßÞ œçä4

B í A •´¤ç -1

$$A=\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}$$ Žèóªß

$$\frac{\pi}{}=\frac{\pi}{}$$ êèãí $$\frac{\pi}{}=\pi-\frac{\pi}{}=-\frac{\pi}{}$$

$$\frac{\pi}{}=\frac{\pi}{}$$ êèãí $$\frac{\pi}{}=\pi-\frac{\pi}{}=-\frac{\pi}{}$$

$$A=\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}$$ òßŽ˜ßŽ‘

$$A=\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}=\frac{\pi}{}=\frac{\pi}{}-\frac{\pi}{}=\frac{\pi}{}$$ Žèßõª

$$B=\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}$$ Žèßõª

êèãí

$$A+B=\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}+\frac{\pi}{}$$

$B=\ -A\ =-\ =$ å«• $A+B\ =$ òßŽß‘Ž

$\frac{\pi}{}$ í $\frac{\pi}{}$ í $\frac{\pi}{}$ © ª ç-2

$+ \frac{\pi}{} = \frac{}{\frac{\pi}{}}$ å ƒâ åç $\frac{\pi}{} = \sqrt{} -$ Žœêª ß

$\frac{\pi}{} = \frac{}{+ \frac{\pi}{}} = \frac{}{+\left(\sqrt{} - \right)} = \frac{}{- \sqrt{}} = \frac{}{\left(-\sqrt{} \right)} = \frac{+\sqrt{}}{}$ ê è ã í

$\frac{\pi}{} \succ$ í $\frac{\pi}{} \succ$ å ŽÕ $\frac{\pi}{}$ $\frac{\pi}{}$ å ƒš ô£ í

$\frac{\pi}{} = \sqrt{ - \frac{\pi}{}} = \sqrt{\frac{- +\sqrt{}}{}} = \frac{\sqrt{} \quad \sqrt{}}{}$ í $\frac{\pi}{} = \frac{\sqrt{} + \sqrt{}}{}$ ò ßŽ Žß

$\frac{\pi}{} = - \frac{\pi}{} = \frac{\sqrt{} + \sqrt{}}{}$

$C = \frac{\pi}{} + \left(\pi - x \right) + \frac{\pi}{} - x \left(\pi + x \right)$ Â ´ ' ç-1

$\left(\pi + x \right) = \pi + x) = - x$ Ž è ó ª ß

$\frac{\pi}{} - x = \pi - \frac{\pi}{} - x = - \frac{\pi}{} - x = \frac{\pi}{} + x = - x$

$\left(\pi - x \right) = \pi - x) = - x$

$\frac{\pi}{} + x = \pi - \frac{\pi}{} + x = - \frac{\pi}{} - x = - x$

$C = x + x =$ å «‡

$x + x + x x =$ å ƒæ ôç-2

$x + x + x x = \left(x + x \right) x - x x + x \Big) + x x$

$= x - x x + x + x x$

$= x + x x + x$

$= \left(x + x \right) =$

$\frac{- \pi}{} \frac{\pi}{}$ æ ô ößŽõ ô èß ä ¹ Ó Ž Â ' — ®ä´ß ô ‹® è¤ ä ßÝ î ¼ Ó• © ª £1

$\frac{- \pi}{}$ í $\frac{\pi}{}$ í $\frac{\pi}{}$ í $\frac{-\pi}{}$ " ô è ¤ è ä ß » Ž•Ó•÷«Â Ø è" ß è æ ä"ß®ª ß ð àË Þ œ-2

$\frac{\pi}{} \frac{- \pi}{} \frac{\pi}{}$ " Ä Øß è Ô èß" ô è ä ß ô » Ž Ó û ä"-é Ž ß © • ª Ëå ƒæ ô-3

$k \quad \mathbb{Z}$ š ô £ $\frac{\pi}{} + k \frac{\pi}{}$ ò ë " ô è ¤ èŽ ä ß ô » Ž Ó M_k Â Ø è" ß ö è ä " ®ª ß ð à ËÞ œ-2

M " Ä Ø è ß ô ‹ ® ß è ¤ ä ßÝ î ¼ Ó x ÷ æ Ü-4 ß

æ õ ô ß Žæ ß ˜•ß Ž ¤ Ó ß I • Ý Žä ß ð ß• ò ä ˜ è — ß M " Ä Ø è ß ¤ ä ß Þ ô Ž Ó ÷ © ª £

$I = \frac{- \pi}{} \frac{- \pi}{} \quad x = \frac{- \pi}{} \quad b \quad I = \frac{\pi}{} \frac{\pi}{} \quad x = \frac{\pi}{} \quad a$

$x \equiv \frac{\pi}{} \; [\pi]$ š ô£ x ò è¤ ãä ß Ž ì ß î ¼ Ó ß $f M$ Â Œß " ô œ å ®œ ä à ËÊ ¿-5

• Ž ³ Ž ô Ø ß ƒ Ž ì ³ Ž × " ì Ÿ î ã ' ó • ° ß ´ ô ‹ ® ß Ž ô Ø î ë Ž -6

$-\frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{} \quad -\pi \quad \pi$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{\pi}{} \; [\pi]$ š ô£ A ± f ® ß Ó æ Ž ß • ñ í Ž ´ ˜ ã ABC Ž à ã Š ¸ ç-f

$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}\right)$ $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right)$ í $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ Ž ó ° • ß æ ã Þ Û ± Ž ô × å Ž ó © ® ª ß £ Ž '

æ ô ˜ ß Ž ¤ ã ß Û ò Ó $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ " ó í • ß ò ã ô ‹ ß ± Ž ô Ø ß Ë. $f A$ $\frac{-\pi}{}$ ® ˜ Ì ç ô œ ß " ® ã ß ð à Ë

$\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv \frac{\pi}{} \; [\pi]$ b M " Ä Ø è ß è ¤ ã Ý î ¼ Ó $f \frac{\pi}{}$ a

$\frac{-\pi}{} \quad \frac{\pi}{} \quad -\frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{}$ © • ª Ë ' ß œ à œ ´ ä ß • © ª £1

$\frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{}$ • ´ £ „ Ó $\frac{\pi}{} = \frac{\sqrt{\;-\sqrt{\;}}}{}$ å f – ä Ë • « -2

$\frac{-\pi}{} \quad \frac{-\pi}{} \quad \frac{\pi}{}$

$A = \frac{x -}{x +}$ Ê À ç. x $\frac{\pi}{} \; \pi$ æ Ü ô ß

$A = x \quad x - x$ å f æ ô '-1

A • ´ £ „ Ó $x = -$ å f – ä à Ë • « -2

x • ´ £ Ž Ó $=$ å f – ä à Ë • « -3

$\frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{}$ • ´ £ f $\frac{\pi}{} = \frac{\sqrt{\;-\sqrt{\;}}}{}$ å f – ä Ë • « -1

$B = (+ x + x) - (+ x) + x)$ $A = x + x + x \quad x$ Â ´ ' -2

$D = x + x + x + x + x \quad x$ $C = x + x) - (x + x)$

$\frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{}$ • ´ £ f -1

$x \in \mathbb{R}$ æ Ü ß -2

$(\pi - x) \quad \frac{\pi}{} x - - \frac{\pi}{} - x \quad (\pi - x)$ Â ´ '

$x - \pi + x + \pi$

$x - \frac{\pi}{} - x + \pi$

$A = x + x - x \quad x \quad x - x$ ® ˜ Ì ç . x $\frac{\pi}{} \quad -\frac{\pi}{} \pi$ æ Ü ß

$A = - x \quad x$ å f æ ô '-1

$x = \frac{\pi}{}$ Þ Ÿ ƒæ ã A • ´ £ f $\frac{\pi}{} = \frac{\sqrt{} - \sqrt{}}{}$ å ƒŽ â Ë -2

x [π] š ô £ $P(x) = x + x -$ Ê À ç

$P(x) = -(x -)$ å ƒæ ô -1

x ” ß û ª $P(x)$ • ˜ Û ƒ-2

. x í P x) • ´ £ f $x = \sqrt{}$ å ƒŽ ä à 3Ë

© ª £ -

$B = + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + + \frac{\pi}{}$ $A = \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{} + \frac{\pi}{}$

“ ®•ª ß ï ° Ÿ® á ÷ Žå îß â › ì $\alpha = \frac{-}{}$ š ô £ α ” ô è ¤ è Ž ì ß à • ô » ò ˜ Ó ß M Â Ø è” ß œ à ä “ß®•© ð à Ë Þ ã æ

$\beta \leq -$ š ô £ β ” ô è ¤ ß è Ž ì à ô ƒ ò ˜ Ó Â Ø è ð ß à • Ë ñ î ˜ ¤ ó ñ ¬ ß ” ô œ à œ ä ß •

$\theta \geq$ š ô £ θ ” ô è è ¤ ä • Ž ì à ô Ó ƒ ò ˜ ß M Â Ø ß • ” Ë î ä ã ® ä £ Ž å îß

– Ž ä ì î ô ƒ ñ ¬ ß M í M æ ô ˜ Ä ß Ø Š ¸ ç • ” ô œ ä “ ß®ª ß ð à Ë

$x \succ -$ š ô£ x ” ô è ¤ ß è Ž ì à ô » ò ˜ Ó ß M Â Ø è” Ë • ä ã © ª £-1

$x \succ -$ š ô £ $]-\pi\ \pi]$ æ ã x © • ª Ë” ÷ Ë • î ä ã © ª £-2

$x \succ -$ š ô £ $[\ \pi[$ æ ã x © • ª Ë” ÷ Ë • î ä ã © ª £-3

$x \succ -$ š ô £ $\pi \frac{\pi}{}$ æ ã x © • ª Ë” ÷ Ë • î ä ã © ª £-4

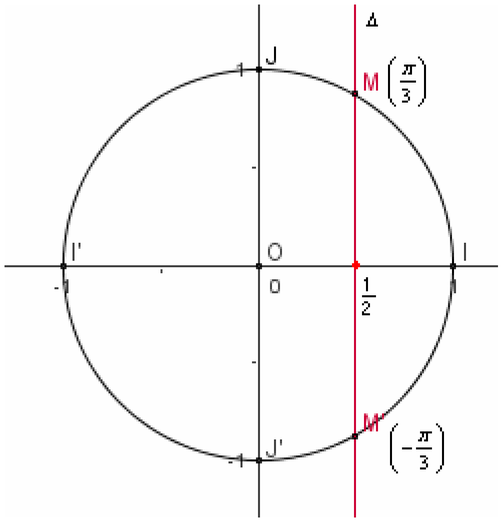
الحساب المثلثي – الجزء 2-

القدرات المنتظرة	الدرس الأول	الدورة الثانية
التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية	عدد الساعات: 15	

I- المعادلات المثلثية

1- المعادلة $\cos x = a$

مثال1 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$



لدينا المستقيم $\Delta : \ x = \frac{1}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين

على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M

و $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M'

فإننا نستنتج أن $\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in [-2\pi; 2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 2\pi]$

فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ أو $-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \le k \le \frac{5}{6}$ تكافئ $k = -1$ أو $k = 0$

ومنه $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{5}{6} \le k \le \frac{7}{6}$ تكافئ $k = 1$ أو $k = 0$

ومنه $x = -\frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

إذن $S = \left\{\frac{-5\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

خلاصة

* المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \ \vee \ a \prec -1$

* $\cos x = 1$ $\ x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

* $\cos x = -1$ $\ x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = \pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

* إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $]0; \pi[$ حيث $\cos \alpha = a$

و بالتالي حلول المعادلة $\cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = -\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين حل المعادلات

$$\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x\in\left]-\pi;3\pi\right] \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x) \quad x\in\mathbb{R}$$

$$2\cos^2 x+3\cos x+1=0 \quad x\in\left[\pi;2\pi\right[$$

الحل

* نحل $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$ $\quad x\in\mathbb{R}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$ تكافئ $2x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $2x=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $3x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

* نحل $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x\in\left]-\pi;3\pi\right]$

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و بالتالي $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $2x-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $2x=\frac{19\pi}{12}+2k\pi$ أو $2x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و حيث $x\in\left]-\pi;3\pi\right]$ فان

من أجل $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi\prec\frac{19\pi}{24}+k\pi\leq 3\pi$ أي $-1\prec\frac{19}{24}+k\leq 3$

ومنه $-\frac{43}{24}\prec k\leq\frac{53}{24}$

و حيث $k\in\mathbb{Z}$ فان $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$

إذن $x=\frac{19\pi}{24}-\pi=-\frac{5\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+\pi=\frac{43\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+2\pi=\frac{67\pi}{24}$

من أجل $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi\prec-\frac{\pi}{24}+k\pi\leq 3\pi$ أي $-1\prec-\frac{1}{24}+k\leq 3$

ومنه $-\frac{23}{24}\prec k\leq\frac{73}{24}$

و حيث $k\in\mathbb{Z}$ فان $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$ أو $k=3$

إذن $x=-\frac{\pi}{24}+0\cdot\pi=-\frac{\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{23\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+2\pi=\frac{47\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+3\pi=\frac{71\pi}{24}$

إذن $S=\left\{-\frac{5\pi}{24};-\frac{\pi}{24};\frac{19\pi}{24};\frac{23\pi}{24};\frac{43\pi}{24};\frac{47\pi}{24};\frac{67\pi}{24};\frac{71\pi}{24}\right\}$

* نحل $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$ $\quad x\in\left[\pi;2\pi\right[$

نضع $\cos x=X$ المعادلة تصبح $2X^2+3X+1=0$

ليكن Δ مميز المعادلة

$$\Delta = 3^2 - 4\times 2\times 1 = 1$$

ومنه $X = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$ أو $X = \frac{-3-1}{4} = -1$

و بالتالي $\cos x = -\frac{1}{2}$ أو $\cos x = -1$

لدينا $\cos x = -1$ تكافئ $x = \pi + 2k\pi$ $/ k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in [\pi; 2\pi[$ فان $\pi \le \pi + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $0 \le k \prec \frac{1}{2}$ ومنه $k = 0$ إذن $x = \pi$

لدينا $\cos x = -\frac{1}{2}$ أي $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

ومنه $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in [\pi; 2\pi[$ فان

من أجل $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\frac{5}{6} \le k \prec \frac{4}{3}$ ومنه $k = 1$

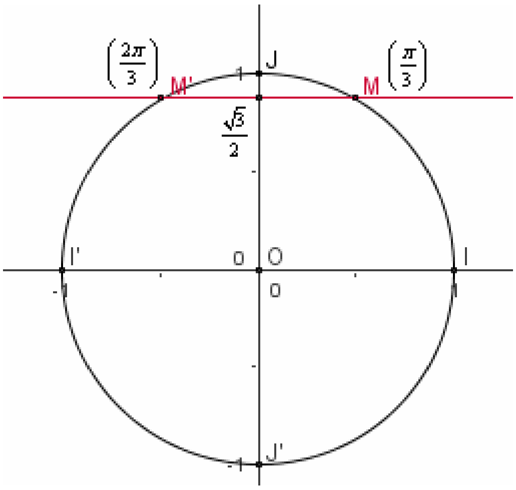
إذن $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$

من أجل $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\frac{1}{6} \le k \prec \frac{2}{3}$ لا يوجد عدد صحيح نسبي يحقق المتفاوتة الأخيرة

إذن $S = \left\{\pi; \frac{4\pi}{3}\right\}$

2- المعادلة $\sin x = a$

مثال1 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x \in \mathbb{R}$



لدينا المستقيم $\Delta: \; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M و $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x \in [-2\pi; 3\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 3\pi]$